

OPTYKA NIELINIOWA

W zakresie optyki liniowej natężenia promieniowania emitowane z konwencjonalnych źródeł światła są niewielkie ($10\text{-}10^3\text{V/cm}$) i oddziałując z materią nie zmieniają jej własności mikro- i makroskopowych, natężenie to jest bowiem kilka rzędów mniejsze niż natężenie pola elektrycznego panującego w materii (10^9V/cm), natężenie światła z laserów impulsowych może osiągać wartości rzędu 10^{12}W/cm^2 a odpowiadające mu natężenie pola elektrycznego wynosi 10^8V/cm jest więc porównywalne z natężeniami pól elektrycznych w materii.

Słabe pole elektryczne powoduje indukcję elektryczną D

$$D = E + 4\pi P$$

polaryzacja

dla małych natężeń

$$P = \chi^{(1)} E$$

podatność
elektryczna

natężenie
pola elektrycznego

$\chi^{(1)}$ – podatność elektryczna

polaryzacja orientacyjna

polaryzacja

polaryzacja indukowana

$$P = P^{or} + P^{ind}$$

$$P^{or} = \frac{\mu^2}{3kT} E + N\alpha E = \left(\frac{\mu^2}{3kT} + N\alpha \right) E$$

$$\chi^{(1)}$$

$\chi^{(1)}$ – podatność elektryczna

W zakresie optyki nieliniowej natężenia wiązki światła laserowego mogą osiągać GW/cm^2 , a natężenia pola elektrycznego wynoszą $10^5 - 10^8 \text{ V}/\text{cm}$.

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}EE + \chi^{(3)}EEE$$

Zasada superpozycji obowiązuje tylko w zakresie liniowym:

Gdy na ośrodek działa kilka słabych pól elektrycznych to w liniowym przybliżeniu polaryzacja elektryczna jest sumą polaryzacji od poszczególnych pól.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t) + E_2(\vec{r}, t) + E_3(\vec{r}, t)$$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_1(\vec{r}, t) + \vec{P}_2(\vec{r}, t) + \vec{P}_3(\vec{r}, t)$$

Słabe pola elektryczne spełniają zasadę superpozycji, według której fale elektromagnetyczne rozchodzą się w ośrodku niezależnie, bez wzajemnego oddziaływania

Jeżeli pola elektryczne są silne, nie można zakładać, że działają one na układ niezależnie. Pola elektryczne nie spełniają już zasady superpozycji, gdyż oddziałują na siebie. Wszystkie zjawiska optyczne, w których zasada superpozycji pól elektrycznych nie jest spełniona, nazywamy *nieliniowymi zjawiskami optycznymi*.

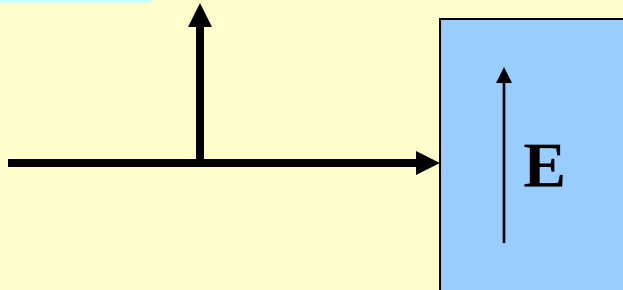
Przykładem zjawisk nieliniowych jest zależność współczynnika załamania światła n od natężenia światła. Dla małych natężeń światła współczynnik załamania światła jest wielkością stałą. Jeżeli jednak na ośrodek pada światło o dużym natężeniu pola elektrycznego E , okaże się to nieprawdą. Badania Kerr'a wykazały, że współczynnik załamania jest proporcjonalny do E^2 , ciecz np. staje się dwójłomna, podobnie jak kryształ jednoosiowy. Przykładem zjawisk liniowych jest absorpcja spełniająca prawo Lamberta i Beera

Przykłady efektów nieliniowych:

1) EFEKT KERRA

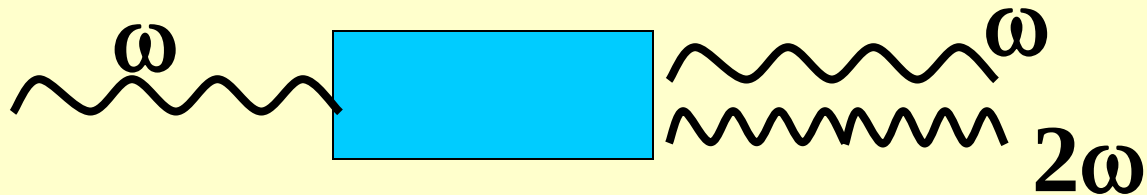
$n \neq f(E)$ zakres liniowy

$n \propto E^2$ zakres nieliniowy

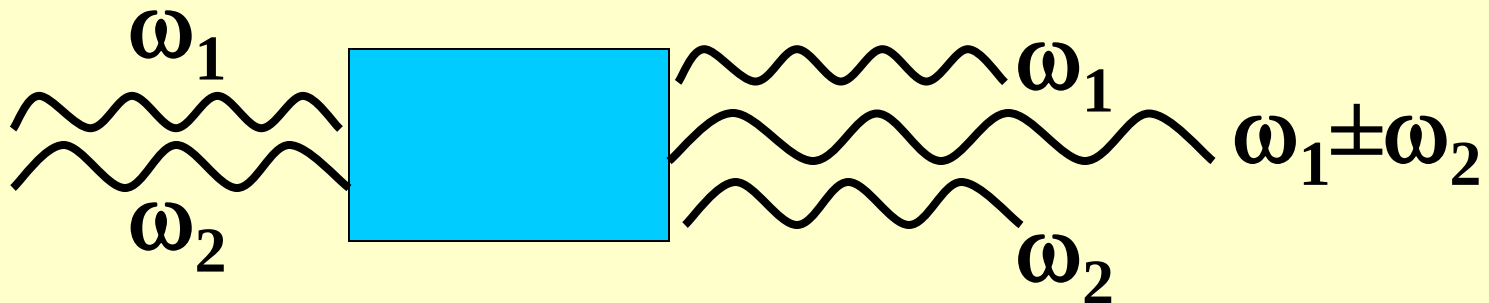


ciecz staje się
optycznie dwójłomna

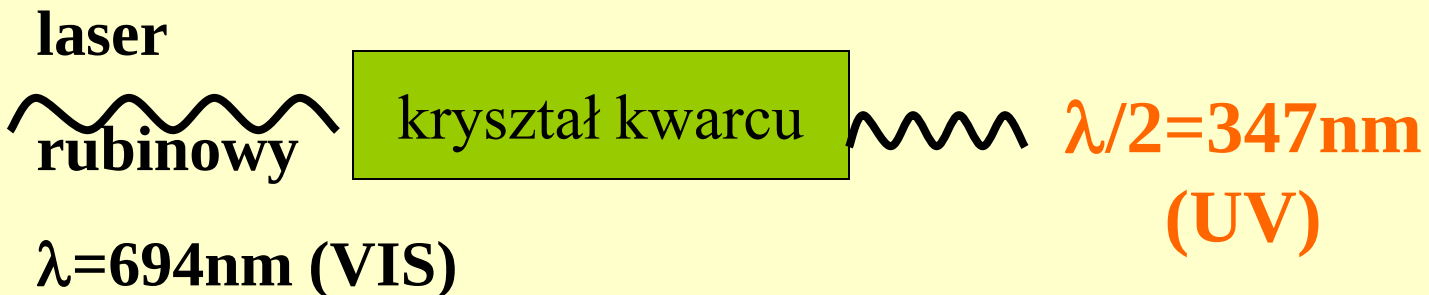
2) SHG (second harmonic generation)



3) Sumowanie i odejmowanie częstości



np.



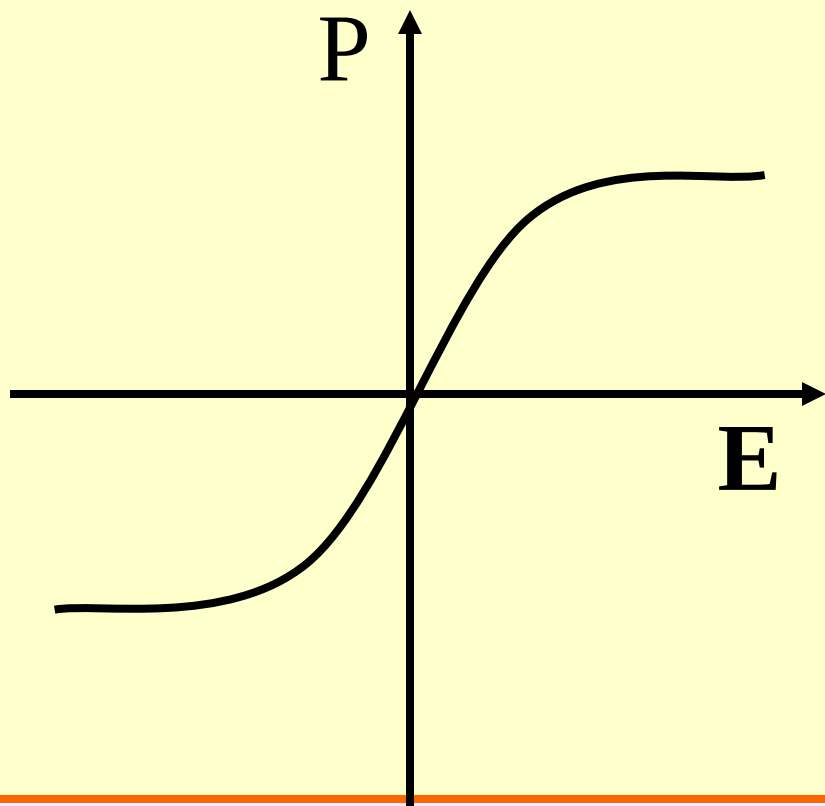
polaryzacja wywołana oddziaływaniem 2 fal o częstotliwości ω

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \chi^{(2)} E^2 = \chi^{(2)} E_o^2 \sin^2 \omega t = \\ &= \chi^{(2)} E_o^2 (1 - \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_o^2 (2 - 2 \cos^2 \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_o^2 [1 + (1 - 2 \cos^2 \omega t)] = \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_o^2 [1 - \cos 2\omega t] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \chi^{(2)} E_o^2}_{\text{DC efekt}} - \underbrace{\frac{1}{2} \chi^{(2)} E_o^2 \cos 2\omega t}_{\text{polaryzacja zmieniająca się z częstotliwością } 2\omega} \end{aligned}$$

DC efekt
stała polaryzacja
niezależna od czasu

polaryzacja
zmieniająca się z częstotliwością 2ω
SHG

pole elektryczne E indukuje w
kryształach nieliniowych polaryzację
drugiego rzędu o składowych



Gdy kryształ ma środek inwersji $P=f(E)$ jest funkcją nieparzystą, człon $\chi^2 E^2$ znika i kryształ nie nadaje się do generowania II harmonicznej.

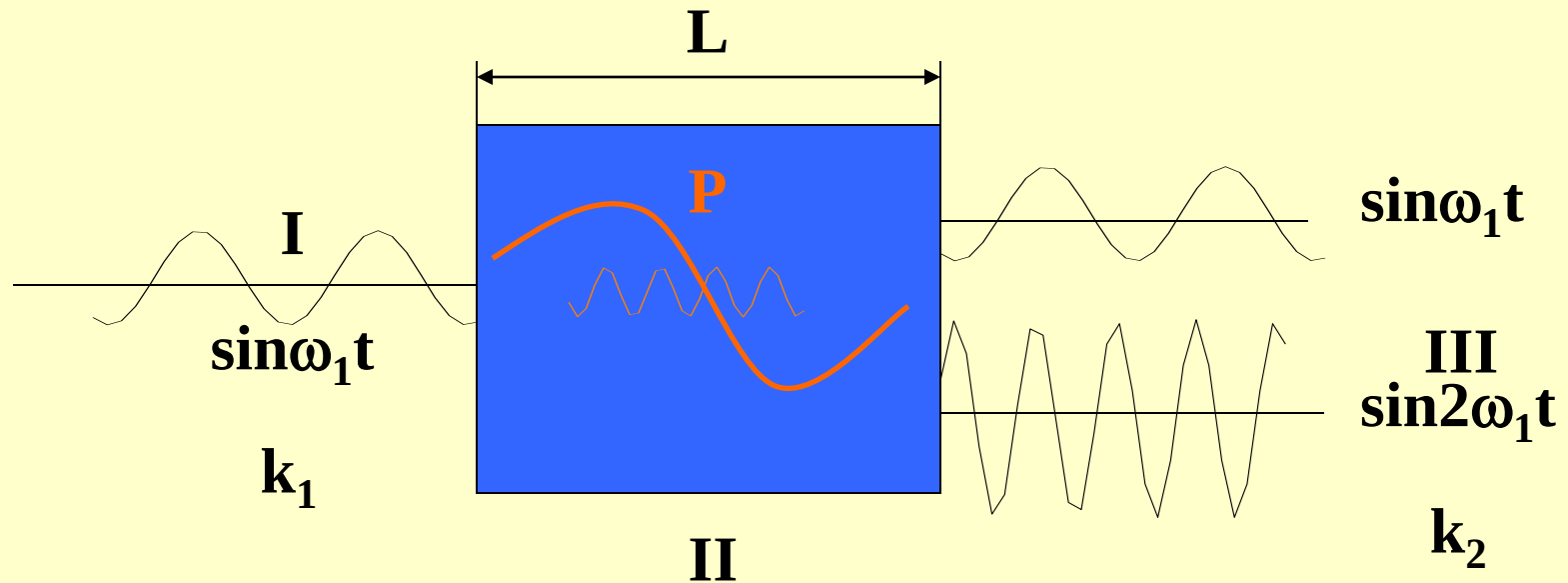
Brak środka inwersji w kryształach jest warunkiem koniecznym ale niedostatecznym!

Aby wydajność procesu konwersji wiązki podstawowej na drugą harmoniczną była duża musi być spełniony WARUNEK DOPASOWANIA FAZOWEGO

Fale w materii rozchodzą się z prędkością fazową:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$$

Jednak mikroskopowe przyczynki pochodzące od pojedynczych cząsteczek, znajdujących się w różnych punktach (x,y,z) nieliniowego ośrodka, tylko wtedy mogą dać w sumie falę makroskopową o odpowiednio dużym natężeniu, gdy prędkości fazowe padających fal wymuszających ω i fal polaryzacji 2ω są zsynchronizowane.



$$I \quad E_{\omega} = E_0^{\omega} \exp[i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})]$$

$$II \quad P = P_0 \exp[i(2\omega_1 t - 2\vec{k}_1 \vec{r})]$$

$$III \quad E_{2\omega} = E_0^{2\omega} \exp[i(2\omega_1 t - \vec{k}_2 \vec{r})]$$

k_2 nie musi być równe $2 k_1$

w ogólności

$$2|\vec{k}_1| \neq |\vec{k}_2|$$

**co oznacza, że faza fali wywołującej
jest różna od fazy fali wytworzonej i powoduje
interferencję destruktywną.**

Aby wydajność konwersji była duża musi być spełniony warunek:

$$\vec{k}_2 = 2\vec{k}_1$$

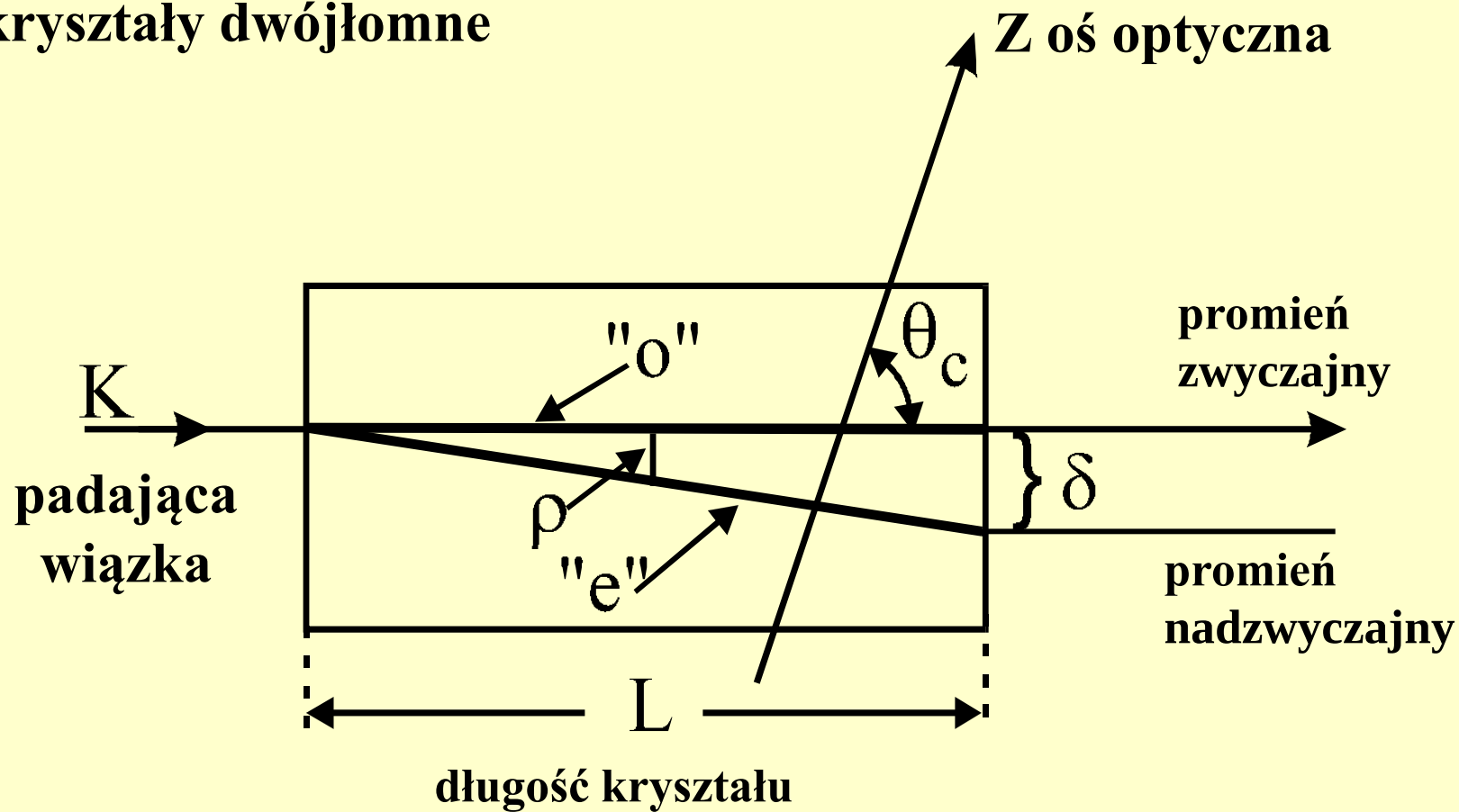
$$\frac{n(2\omega)\omega}{c} = \frac{2n(\omega)\omega}{c}$$

czyli

$$n(2\omega) = n(\omega)$$

ale ze względu na dyspersję jest to zazwyczaj nie możliwe

kryształy dwójłomne



Wiązka światła, ulegając załamaniu, rozszczepia się na dwa promienie.

Metody zwiększania wydajności konwersji:

- 1) Duże natężenie I_0
- 2) Używanie substancji silnie nieliniowych (duże wartości podatności drugiego rzędu $\chi^{(2\omega)}$)
- 3) Spełnienie warunku dopasowania fazowego $\Delta\vec{k} = 0$

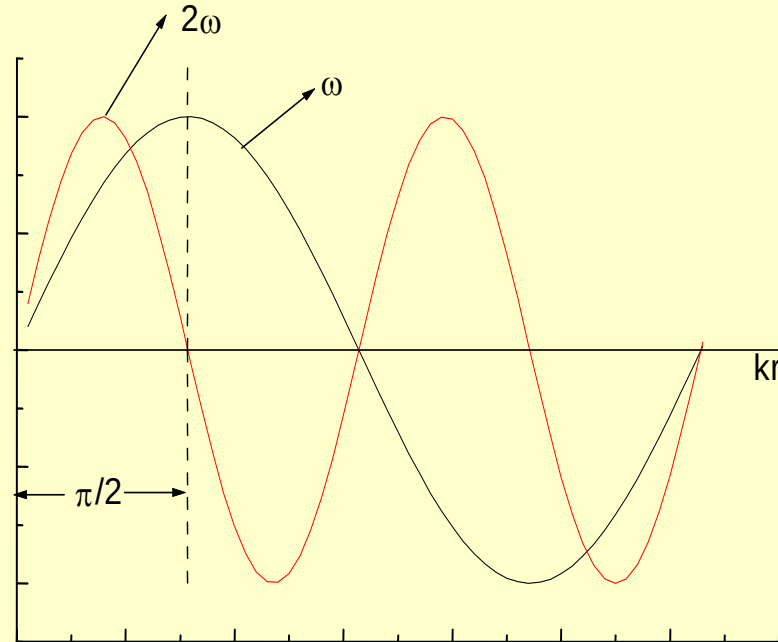
$$I(2\omega) = \chi^{(2)} I^2 \left(\frac{\sin(\Delta k l / 2)}{\Delta k l / 2} \right)^2 I_0^2(\omega)$$

Jak spełnić warunek $\Delta\vec{k} = 0$

czyli $n(\omega) = n(2\omega)$ (dla wiązek współbieżnych)

Dlaczego kryształy nieliniowe są „cienkie” choć ze wzorów wynika, że intensywność SHG jest wprost proporcjonalna do L^2 ?

**długość
spójności**



$$\Delta k l = \frac{\pi}{2}$$

$$l = \frac{\pi}{2\Delta k} = \frac{\pi c}{2\omega(n_{2\omega} - n_{\omega})} = \frac{\lambda}{4(n_{2\omega} - n_{\omega})}$$

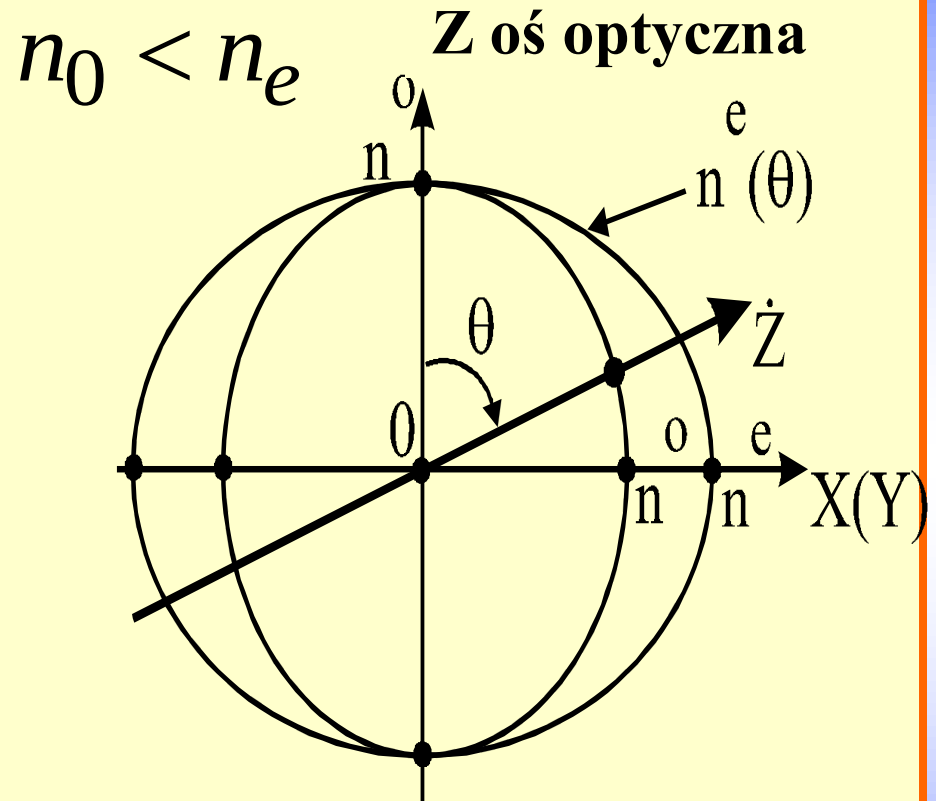
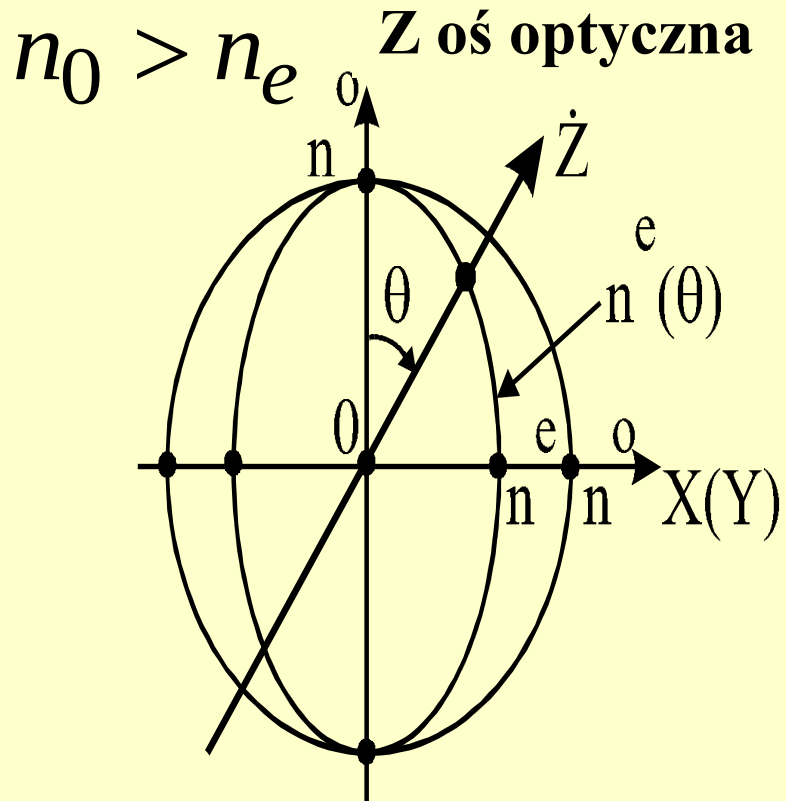
Gdy grubość kryształu L

$$L \gg l_{spójn} = \frac{\pi}{2\Delta k}$$

fale o częstości ω_1 i ω_2 przestają być zgodne w fazie i zaczyna się interferencja destruktywna

w praktyce $L = \text{mm, cm}$

Przekroje powierzchni współczynnika załamania dla jednoosiowego kryształu:



kryształ jednoosiowy:

(a) ujemny

(b) dodatni

oś optyczna

kierunek dopasowania
fazowego

θ_m

$n_2^e(\theta)$

$n_1^e(\theta)$

n_1^o

n_2^o

kierunek, wzdłuż którego
współczynnik załamania
promienia zwyczajnego
wiązki podstawowej n_1^o
i współczynnik załamania
promienia nadzwyczajnego
wiązki drugiej harmoniczej
 n_2^e są takie same

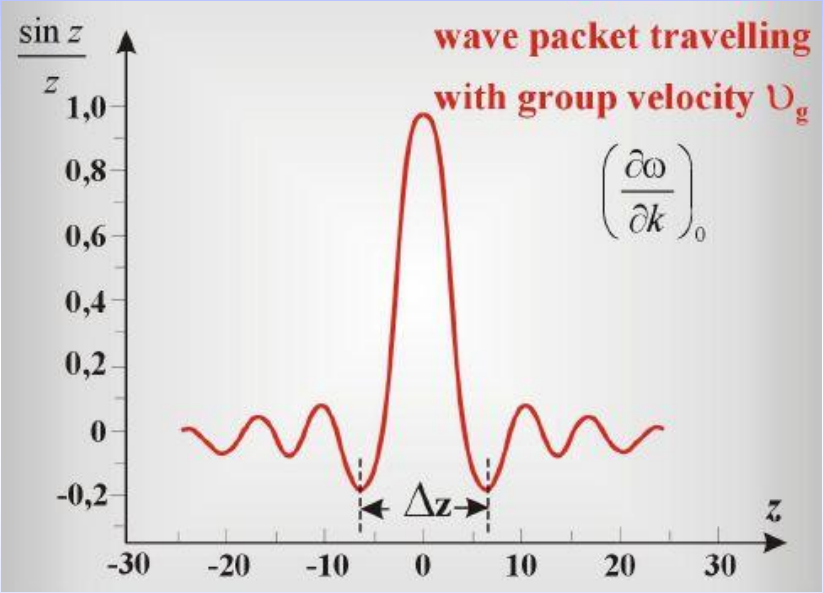
$$n_1^o(\omega) = n_2^e(2\omega)$$

**Jakie własności kryształu powinny być brane pod uwagę
w procesie generacji SHG?**

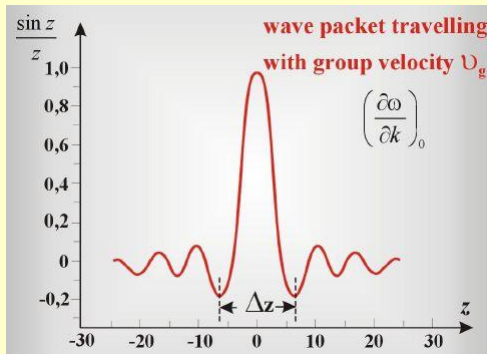
- 1) Własności nieliniowe materiału $\chi^{(2)}$**
- 2) Własności dyspersyjne $n(\omega)$**
- 3) Prędkość grupowa (group delay)**
- 4) Próg uszkodzenia kryształu (damage threshold)**

Mechanizm generowania drugiej harmonicznej za pomocą laserów femtosekundowych jest taki sam jak omówiony poprzednio. Jednak w przypadku tak krótkich impulsów należy uwzględnić dodatkowe efekty, które są zaniedbywane w przypadku impulsów dłuższych lub przy pracy ciągłej. Krótki impuls odpowiada dużej szerokości widmowej $\Delta\omega$. Dla wygenerowania krótkich impulsów, warunek dopasowania fazowego powinien być więc spełniony nie tylko dla centrum linii widmowej ω_0 , ale także dla całego rozkładu widmowego z zakresu. W przeciwnym razie wygenerowana druga harmoniczna będzie wąska widmowo, czyli czasowy impuls drugiej harmonicznej ulegnie wydłużeniu. Tak więc, przy generowaniu drugiej harmonicznej za pomocą impulsów femtosekundowych ważne są nie tylko własności nieliniowe kryształów $\chi^{(2)}$, ale również ich własności dyspersyjne.

prędkość grupowa



$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$



$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$$

prędkość fazowa
dla fali płaskiej

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0$$

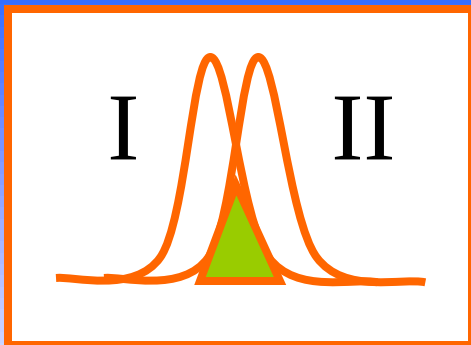
prędkość grupowa
dla paczki falowej

$$\Psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$$

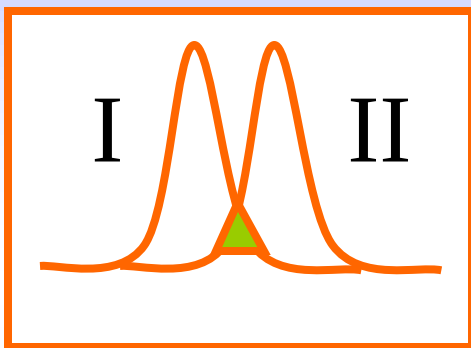
funkcja falowa wiązki niemonochromatycznej

$$\Psi(z, t) = 2A_0(k_0) \frac{\sin \left[\left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \Delta k \right]}{z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t} \cdot \exp(ik_0 z - \omega_0 t)$$



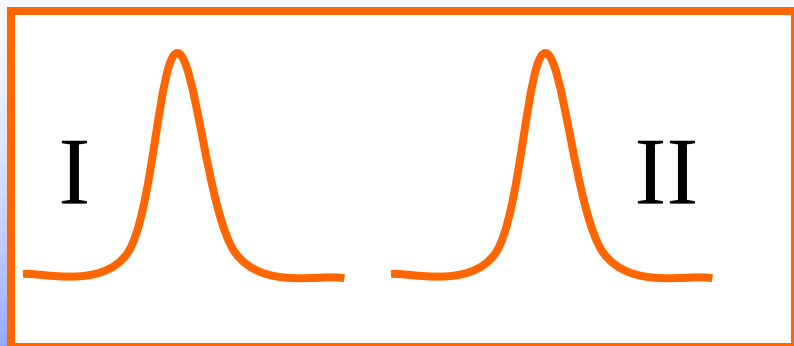
$$t = t_1$$

Oznacza to, że dla coraz krótszych impulsów
oraz dla długiego Δt (group delay)
obszar oddziaływania I i II harmonicznej
maleje



$$t = t_2$$

ze względu na własności dyspersyjne
kryształu
prędkości grupowe wiązki
podstawowej II harmonicznej są
zwyczajowo różne mimo
dopasowania fazowego



$$t = t_3$$

indeks: I – wiązka podstawowa, II-druga harmoniczna

Group delay-konsekwencje różnej prędkości grupowej dla I i II harmonicznej

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}; \quad t_g = \frac{l}{v_g} = l \frac{dk}{d\omega}; \quad k = \frac{n\omega}{c}; \quad \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}$$

$$t_g^1 = \frac{l}{c} \left[\frac{dn_1}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\omega_1} \omega_1 + n_1 \right] = \frac{l}{c} \left[-\frac{dn_1}{d\lambda_1} \frac{2\pi c}{n_1 \omega_1^2} \omega_1 + n_1 \right] = \frac{l}{c} \left[-\frac{dn_1}{d\lambda_1} \lambda_1 + n_1 \right]$$

$$t_g^2 = \frac{l}{c} \left[-\frac{dn_2}{d\lambda_2} \lambda_2 + n_2 \right]$$

$$\Delta t = [t_g^2 - t_g^1] = \frac{l}{c} \left[-\frac{dn_1}{d\lambda_1} \lambda_1 - \frac{dn_2}{d\lambda_2} \lambda_2 \right]$$

Warunek określający efektywną długość kryształu dla krótkich impulsów

$$\Delta t_g \leq t_p$$

opóźnienie grupowe jest dużo mniejsze niż czas trwania impulsu t_p

Dalsza część kryształu przestaje być efektywna bo wiązki przestają się nakładać

1)

$$\Delta t_g \ll t_p$$

$$t_g \rightarrow 0; \frac{dn_1}{d\lambda_1} \lambda_1 = \frac{dn_2}{d\lambda_2} \lambda_2$$

$$\frac{dn_1}{d\lambda_1} \frac{2\pi c}{n(\omega)\omega_1} = \frac{dn_2}{d\lambda_2} \frac{2\pi c}{n(\omega)2\omega_1} \Rightarrow 2 \left(\frac{dn_1}{d\lambda_1} \right)_I = \left(\frac{dn_2}{d\lambda_2} \right)_{II}$$

dla kryształów o małym czasie opóźnienia Δt_g druga harmoniczna osiąga maksimum dyspersji Δn

2) $\Delta t_g > t_p$ czyli Δt_g rośnie

$$2\left(\frac{dn_1}{d\lambda_1}\right)_I > \left(\frac{dn_2}{d\lambda_2}\right)_{II}$$

stąd wynika, że $\frac{dn_2}{d\lambda_2}$ osiąga minimum dla $\Delta t_g \rightarrow 0$ czyli

$$\frac{dn_2^2}{d\lambda_2^2} = 0$$

NIE MA GVD
a więc impuls jest krótki

Czyli gdy

- 1) $\Delta t_g \leq t_p$ **GVD = 0**
czas trwania impulsu II harmonicznej jest krótki
- 2) $\Delta t_g > t_p$ **GVD $\neq 0$**
czas trwania impulsu wydłuża się
(puls stretching)

Używając krótkich impulsów femtosekundowych dla wiązki podstawowej o czasie trwania t_p i chcąc wygenerować krótkie impulsy dla drugiej harmonicznej, należy wybrać takie kryształy nieliniowe, dla których opóźnienie grupowe Δt jest niewielkie.

Praktyczne aspekty generowania II harmonicznej

a) SHG z wydajnością 10% otrzymuje się rutynowo dla laserów piko i subpikosekundowych dużej mocy
(w literaturze-80% konwersji dla kryształów o grubości mm)

b) Stosowane kryształy:

KDP (potassium dihydrogen phosphate)

$\Delta t_g = 0.08$ ps/cm (group velocity)

LiNbO_3 $\Delta t_g = 6$ ps/cm (dla kryształu o grubości 1cm i impulsu 0.5ps I harmonicznej)

ADP (amonium dihydrogen phosphate)

LiIO_3 $\Delta t_g = 0.7$ ps/cm

KTiOPO_4 (KTP)

CsH_2AsO_4 (CDA)

Kryształy nieliniowe

KDP (potassium dihydrogen phosphate) } $\Theta=50.4^\circ$
ADP (amonium dihydrogen phosphate) }

LiNbO (niobian litu) $\Theta=90^\circ$

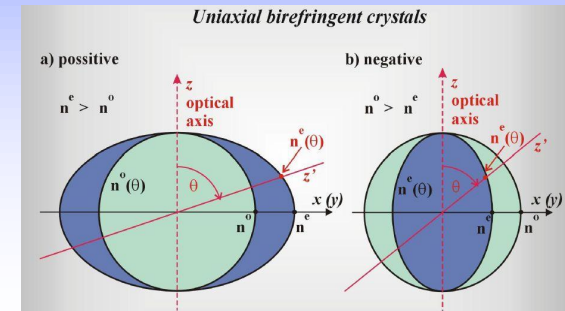
Ba₂NaNb₅O₁₅ (niobian barowo-sodowy)

- Rozróżniamy dwa typy dopasowania fazowego. Jeżeli mieszające się fale o częstości ω_1 i ω_2 mają tę samą polaryzację, to częstość sumacyjna $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (SHG) spolaryzowana jest w płaszczyźnie prostopadłej do ich płaszczyzny polaryzacji. W tym wypadku mówimy o dopasowaniu fazowym I typu. W jednoosiowych kryształach ujemnych dopasowanie fazowe I typu – to spełnienie warunku

$$k_1^0 + k_2^0 = k_3^e(\theta)$$

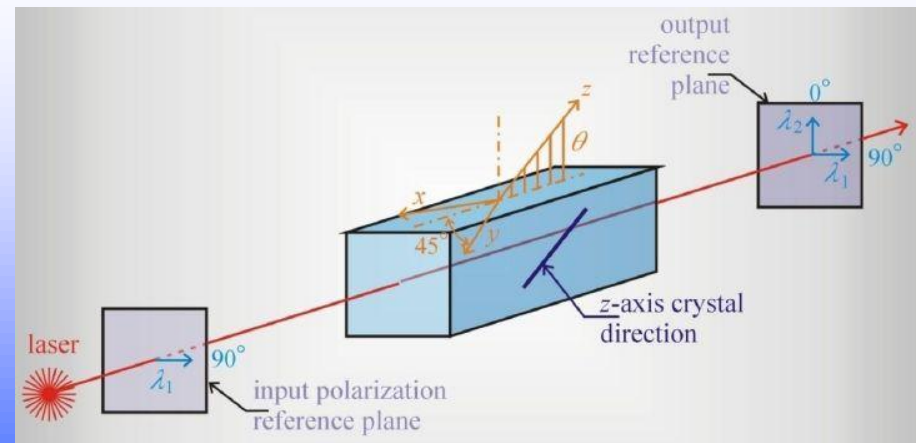
(oznaczamy je jako dopasowanie fazowe „ooe”
lub oddziaływanie „ooe”),

w jednoosiowych kryształach dodatnich zaś – to spełnienie warunku



$$k_1^e(\theta) + k_2^e(\theta) = k_3^0$$

(oznaczamy je jako dopasowanie fazowe „eeo”
lub oddziaływanie „eeo”)



- Jeżeli mieszające się fale ω_1 i ω_2 mają ortogonalne polaryzacje, realizowany jest przypadek dopasowania fazowego II typu. Dla kryształów jednoosiowych ujemnych spełniony jest warunek

$$\mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2^e(\theta) = \mathbf{k}_3^e(\theta)$$

zwany dopasowaniem fazowym „oeo”, lub

$$\mathbf{k}_1^e(\theta) + \mathbf{k}_2^0 = \mathbf{k}_3^e(\theta)$$

zwany dopasowaniem fazowym „oeo”.

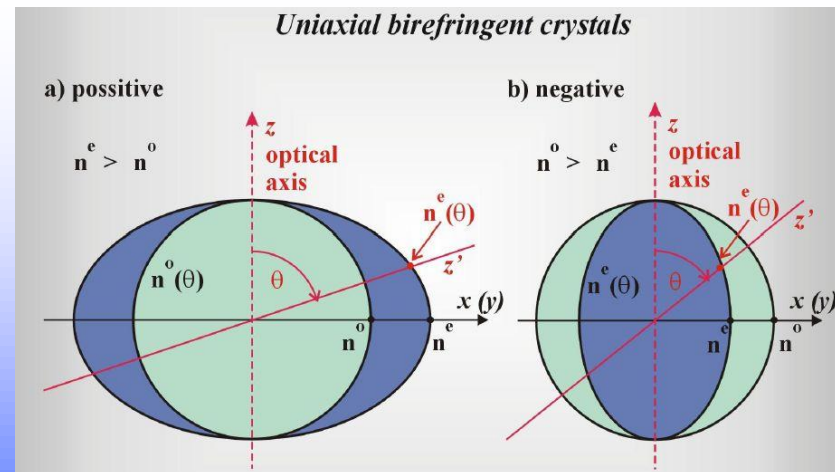
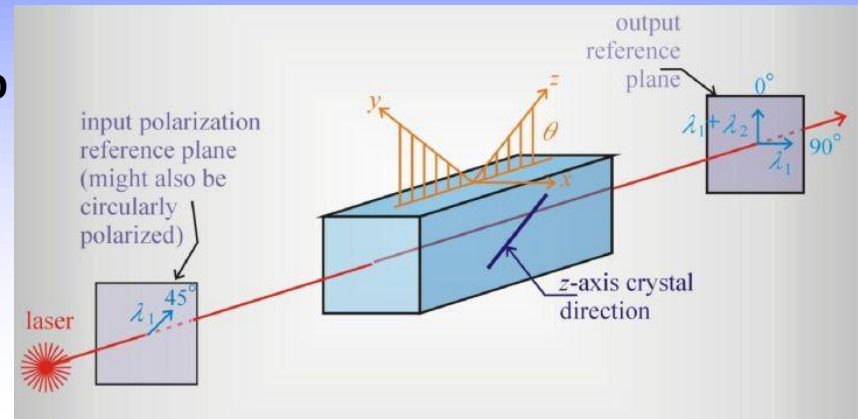
Dla kryształów jednoosiowych dodatnich dopasowanie II typu spełnia warunki

$$\mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2^e(\theta) = \mathbf{k}_3^0$$

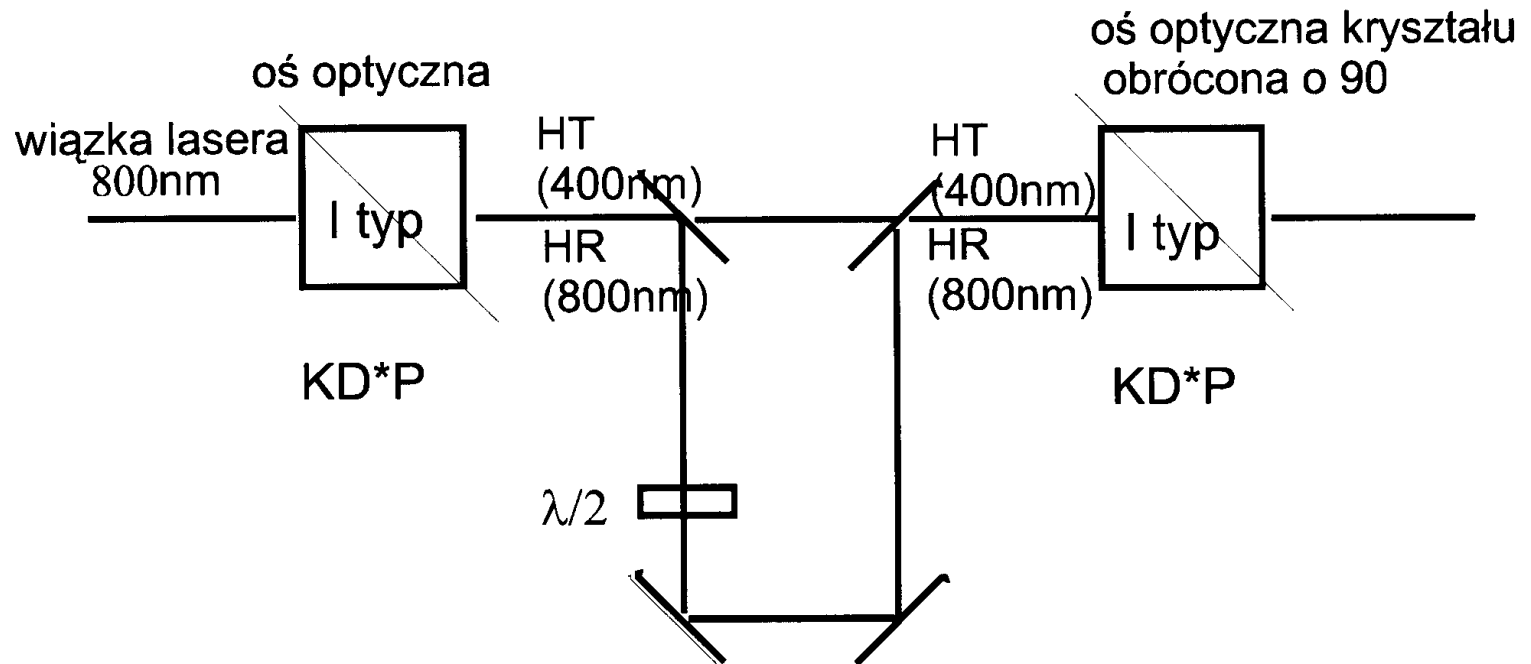
(dopasowanie fazowe „oeo”) lub

$$\mathbf{k}_1^e(\theta) + \mathbf{k}_2^0 = \mathbf{k}_3^0(\theta)$$

(dopasowanie fazowe „eoo”).



Rys.2



Narysuj na rysunku polaryzację poszczególnych wiązek w różnych miejscach schematu.

GENERATOR PARAMETRYCZNY

W generatorze parametrycznym zachodzą zjawiska nieliniowe 2-go rzędu $\chi^{(2)}$

