

ROZDZIAŁ 4

4. Zjawiska nieliniowe

- 4.1. Zjawiska nieliniowe drugiego rzędu**
- 4.2. Zjawiska nieliniowe trzeciego rzędu**
- 4.3. Wymuszone rozpraszanie Ramana**
- 4.4. Rozpraszanie Brillouina**
- 4.5. Mieszanie czterofalowe**
- 4.6. Automodulacja fazy (SPM)**
- 4.7. Skośna modulacja fazy (XPM)**
- 4.8. Teoretyczny opis zjawiska GVD i automodulacji SPM**
 - 4.8.1. Nieliniowe równanie Schrodingera**
 - 4.8.2. Włączenie efektów nieliniowych wyższego rzędu do nieliniowego równania Schrödingera**
 - 4.8.3. Wyprowadzenie zależności na poszerzenie impulsu spowodowanego efektem GVD i efektem automodulacji SPM**

4. Zjawiska nieliniowe

Jeszcze do niedawna zjawiska nieliniowe znajdowały się w centrum zainteresowania stosunkowo wąskiego grona specjalistów zajmujących się spektroskopią laserową. Zjawiska rozpraszania Ramana wykorzystywane były dotychczas szeroko w chemii, inżynierii materiałowej oraz fizyce do badania natury oddziaływań, charakteru wiązań chemicznych, własności półprzewodników. W ostatnim dziesięcioleciu zainteresowanie zjawiskami wymuszonego rozpraszania Ramana i innymi nieliniowymi zjawiskami optycznymi wzrosło dramatycznie wraz z rozwojem telekomunikacji optycznej. Po roku 2000 prawie wszystkie systemy dalekozasięgowe (ang.long-haul) definiowane jako przesyłające na 300 do 800 km i ultradalekozasięgowe (ang.ultralong-haul) osiągające ponad 800 km używają wzmocnienia Ramana, zastępując najbardziej popularne w latach 90 tych wzmacniacze erbowe EDFA. Choć zjawisko wzmocnienia Ramana zostało zademonstrowane w światłowodach na początku lat 70-tych przez Stolena i Ippena [1] to lata 80 i pierwsza połowa lat 90-tych została zdominowana przez wzmacniacze optyczne EDFA. W drugiej połowie lat 90-tych nastąpił powtórny wzrost zainteresowania wzmacniaczami Ramana. Oczywiście fizyka

zjawiska rozpraszania Ramana pozostaje ciągle ta sama od czasu opublikowania przez Ramana i Krishnana artykułu w Nature w 1928 roku [2]. Aby jednak zjawisko to mogło być wykorzystane, musiał nastąpić ogromny postęp w technologiach światłowodowych [3-5].

Promieniowanie emitowane przez konwencjonalne źródła światła, jak żarówki, lampy błyskowe itd., nie jest monochromatyczne ani spójne w czasie i przestrzeni. Natężenie pola elektrycznego promieniowania emitowanego z konwencjonalnych źródeł światła jest niewielkie ($10\text{-}10^3$ V/cm). Promieniowanie o takim natężeniu, oddziałując z materią (odbicie, rozpraszanie, absorpcja, załamanie światła) nie zmienia jej własności makroskopowych ani mikroskopowych. Jest bowiem kilka rzędów mniejsze niż natężenie pola elektrycznego panującego w materii (rzędu 10^9 V/cm). Natężenie światła laserowego, szczególnie z laserów impulsowych generujących krótkie impulsy, może osiągać bez większych trudności wartości większe niż 10^{12} W/cm², a odpowiadające mu natężenia pola elektrycznego promieniowania przekraczają 10^5 V/cm do 10^8 V/cm. Są więc porównywalne z natężeniem pól elektrycznych w materii.

Słabe pola elektryczne E promieniowania wywołują indukcję elektryczną D

$$D = E + 4\pi P, \quad (4.1)$$

która zależy od polaryzacji ośrodka P . Dla małych natężeń światła polaryzacja zależy liniowo od natężenia pola elektrycznego E

$$P = \chi^{(1)} E, \quad (4.2)$$

gdzie $\chi^{(1)}$ nosi nazwę podatności elektrycznej.

Liniowa zależność polaryzacji od natężenia pola E wynika z faktu, że polaryzacja ośrodka P

jest sumą polaryzacji orientacyjnej P^{orient} ($P^{\text{orient}} = N \frac{\mu^2}{3kT} E$) i polaryzacji indukowanej

$$P^{\text{ind}} \quad (P^{\text{ind}} = N\alpha E).$$

Gdy natężenie pola elektrycznego E wzrasta, polaryzacja ośrodka przestaje zależeć liniowo od E i wyraża się wzorem

$$P = \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (4.3)$$

Ponieważ podatność elektryczna nie jest w ogólności wielkością skalarną lecz tensorem, możemy zapisać

$$P_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (4.4)$$

Jeżeli na ośrodek działa kilka pól elektrycznych o niewielkim natężeniu (np. kilka wiązek laserowych), to w liniowym przybliżeniu całkowita polaryzacja elektryczna jest sumą polaryzacji pochodzących od poszczególnych pól

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_3(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (4.5)$$

czyli pola elektryczne o niewielkim natężeniu spełniają zasadę superpozycji, co oznacza, że fale elektromagnetyczne rozchodzą się w ośrodku niezależnie i nie oddziałują wzajemnie. Zjawiska optyczne podlegające zasadzie superpozycji nazywamy *liniowymi zjawiskami optycznymi*. Gdy natężenia pól elektrycznych są duże, pola elektryczne nie spełniają już zasady superpozycji, ponieważ oddziałują ze sobą. Zjawiska optyczne, w których zasada superpozycji pól elektrycznych nie jest spełniona, nazywamy *nieliniowymi zjawiskami optycznymi*. Przykładem zjawisk nieliniowych jest zależność współczynnika załamania światła n od natężenia światła. Dla małych natężeń światła współczynnik załamania światła jest wielkością stałą. Jeżeli na ośrodek pada światło o dużym natężeniu pola elektrycznego E , jest proporcjonalny do E^2 . Innym przykładem zjawisk liniowych jest absorpcja opisywana prawem Lamberta i Beera

$$T = I / I_0 = \exp(-\alpha cl) \quad (4.6)$$

lub

$$A = \ln \frac{1}{T} = \alpha cl, \quad (4.7)$$

gdzie T jest transmisją układu i określa stosunek natężenia wiązki I , która przeszła przez ośrodek, do natężenia wiązki padającej I_0 , α jest współczynnikiem absorpcji, c - stężeniem substancji absorbującej światło, l - długością drogi optycznej. W zakresie optyki liniowej współczynnik absorpcji α nie zależy od natężenia światła. Dla większych natężeń światła współczynnik absorpcji zaczyna zależeć od tego natężenia.

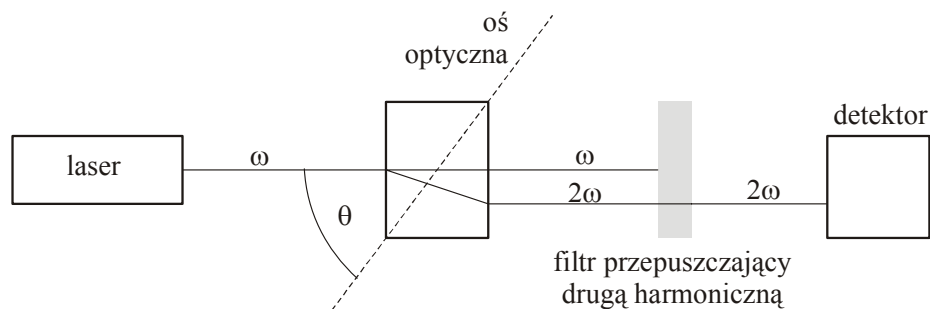
4.1. Zjawiska nieliniowe drugiego rzędu [6]

Zjawiska nieliniowe drugiego rzędu opisane są drugim członem równania (4.4)

$$P_i = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (4.8)$$

Do najczęściej wykorzystywanych zjawisk nieliniowych drugiego rzędu należą: a) generowanie drugiej harmonicznej, b) mieszanie częstotliwości wiązek laserowych, c) wzmocnienie parametryczne. Zjawiska nieliniowe II rzędu są szczegółowo omawiane w książce [6]

Zilustrujmy zjawisko generacji drugiej harmonicznej opisem następującego doświadczenia. Światło lasera o częstotliwości ω skierujemy na kryształ nieliniowy. Zmieniając kąt między kierunkiem wiązki laserowej i kierunkiem osi optycznej, przy pewnym kącie (zwanym kątem dopasowania fazowego) zauważymy, że wiązka światła laserowego, która wyszła z kryształu, ma dwie składowe o częstotliwości ω i o częstotliwości 2ω . Tak więc obok składowej o częstotliwości ω zwanej fundamentalną, która nie zmienia swej częstotliwości po przejściu przez kryształ, ale obok niej pojawia się dodatkowa składowa, zwana drugą harmoniczną o częstotliwości 2 razy większej od częstotliwości podstawowej (Rys.4.1). Proces generacji drugiej harmonicznej nazywany jest również *procesem SHG* (ang.*Second Harmonic Generation, SHG*).



Rys.4.1 Schemat układu generującego drugą harmoniczną

Zjawiska nieliniowe II rzędu nie odgrywają zbyt dużej roli w światłowodach. Szkło krzemionkowe jest amorficzne, nie ma wyróżnionej osi symetrii, posiada środek inwersji. Ta ostatnia własność symetrii oznacza, że procesy nieliniowe II rzędu nie zachodzą w szklanych światłowodach. Zjawiska nieliniowe drugiego rzędu zostały omówione szczegółowo w [6].

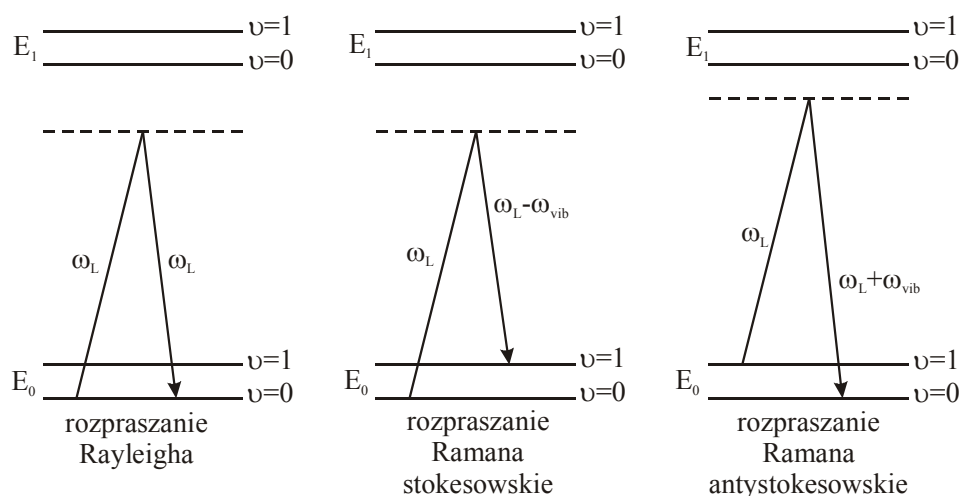
4.2. Procesy nieliniowe 3 rzędu [6]

Nieliniowe zjawiska optyczne 3 rzędu powodują **wymuszone rozpraszanie Ramana**.

Procesy rozpraszania Ramana można opisać równaniem

$$P_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E + \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l . \quad (4.9)$$

Pierwszy człon związany z polaryzacją liniową opisuje spontaniczne, liniowe rozpraszanie Ramana, badane konwencjonalnymi metodami spektroskopii Ramana. Człony drugi i trzeci opisują spontaniczne, nieliniowe rozpraszanie Ramana (zwane *rozpraszaniem hiperramanowskim*). Człon trzeci opisuje również wymuszone rozpraszanie Ramana. Spontaniczne, liniowe rozpraszanie Ramana opisano w wielu podręcznikach [7-8]. Spontaniczne rozpraszanie Ramana można przedstawić za pomocą schematu na rysunku 4.2.

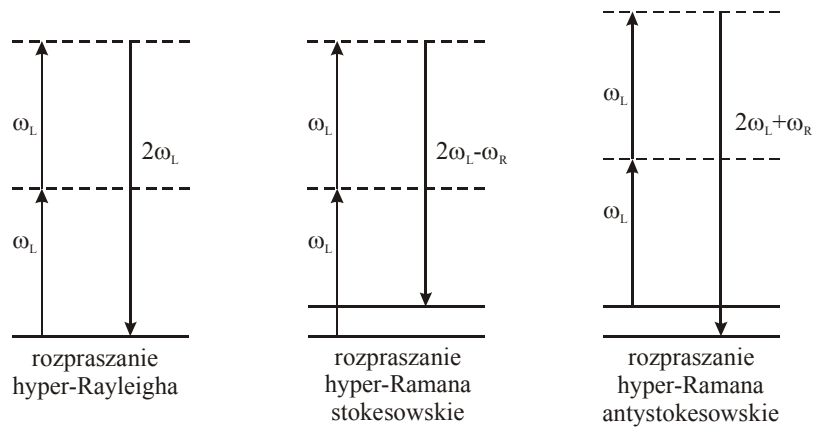


Rys.4.2 Schemat rozpraszania Rayleigha i Ramana

Poziome E_0 i E_1 oznaczają poziomy elektronowe; poziome numerowane liczbą kwantową ν oznaczają kolejne poziomy wibracyjne. Jeżeli na cząsteczkę pada foton o energii $\hbar\omega_L$, która jest mniejsza od energii rezonansowej $\Delta E = E_1 - E_0$, ulega on rozproszeniu elastycznemu lub nieelastycznemu. Rozproszenie elastyczne nosi nazwę *rozpraszania*

Rayleigha, rozpraszanie nieelastyczne znane jest jako - *rozpraszanie Ramana*. Proces rozpraszania można opisać klasycznie. Zmienne pole elektryczne o natężeniu $E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_L t)$ wywołuje polaryzację elektronową P ośrodka modulowaną w czasie z częstotliwością ω_L . Z kolei zmieniająca się w czasie polaryzacja ośrodka (czyli drgające dipole indukowane) wywołuje wypromieniowanie fali elektromagnetycznej o tej samej częstotliwości ω_L (gdy drgania dipola nie są modulowane przez drgania cząsteczki z częstotliwością ω_{wib}) lub częstotliwości $\omega_L \pm \omega_{wib}$ (gdy drgania dipola są modulowane dodatkowo przez drgania cząsteczki z częstotliwością ω_{wib}). W pierwszym przypadku, gdy częstotliwości promieniowania padającego i promieniowania rozproszonego są takie same i wynoszą ω_L , mówimy o **rozpraszaniu Rayleigha**. W drugim przypadku częstotliwość promieniowania rozproszonego jest mniejsza ($\omega_L - \omega_{wib}$) lub większa ($\omega_L + \omega_{wib}$) od częstotliwości promieniowania padającego ω_L . Promieniowanie rozproszone o częstotliwości $\omega_L - \omega_{wib}$ nazywamy **stokesowskim rozpraszaniem Ramana**, a o częstotliwości $\omega_L + \omega_{wib}$ - **antystokesowskim rozpraszaniem Ramana**.

Procesy rozpraszania Ramana można opisać również kwantowo. Foton o energii $\hbar\omega$ pada na cząsteczkę znajdującą się w stanie elektronowym E_0 i podstawowym stanie wibracyjnym ($\nu = 0$), przenosząc ją do stanu wirtualnego o energii E spełniającej warunek $E_0 < E < E_1$. Na poziomie wirtualnym cząsteczka żyje niezwykle krótko, po czym wraca do: a) tego samego stanu początkowego ($E_0, \nu = 0$), emitując foton o energii $\hbar\omega_L$ (rozpraszanie Rayleigha), b) wzbudzonego stanu wibracyjnego ($E_0, \nu = 1$), emitując foton o energii $\hbar(\omega_L - \omega_{wib})$ (stokesowskie rozpraszanie Ramana). Jeżeli foton o energii $\hbar\omega$ pada na cząsteczkę znajdującą się w stanie elektronowym E_0 i wzbudzonym stanie wibracyjnym $\nu = 1$, wraca do stanu ($E_0, \nu = 0$) powoduje emisję fotonu o energii $\hbar(\omega_L + \omega_{wib})$. Ten typ rozpraszania nosi nazwę antystokesowskiego rozpraszania Ramana. Gdy natężenie padającego promieniowania wzrasta, zwiększa się również prawdopodobieństwo, że w rozpraszaniu Ramana i Rayleigha uczestniczą dwa fotony. Zjawisko dwufotonowego rozpraszania znane jest jako rozpraszanie hiper- Ramana lub hiper-*Rayleigha* i ich mechanizm przedstawiono na rysunku 4.3 .



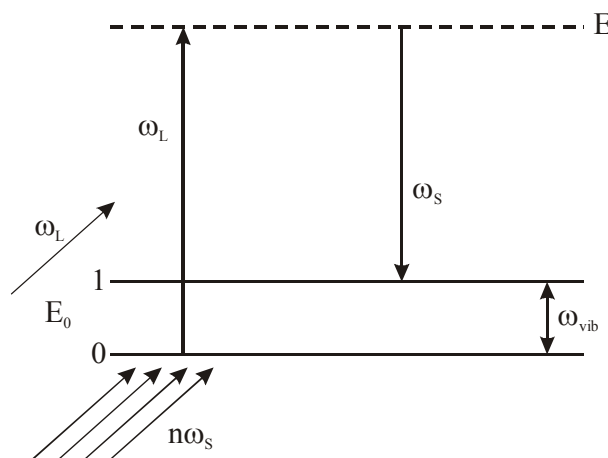
Rys.4.3 Rozpraszanie hiper- Rayleigha i hiper-Ramana

Zjawiska dwufotonowego rozpraszania opisane są drugim członem równania (4.9)

4.3. Wymuszone rozpraszanie Ramana (ang. Stimulated Raman Scattering, SRS)

Procesy omówione w rozdziale 4.2 należą do grupy zjawisk **rozpraszania spontanicznego**. W rozdziale 4.3 zajmiemy się nieliniowymi zjawiskami optycznymi trzeciego rzędu $\chi^{(3)}$, które opisują zjawiska wymuszonego rozpraszania Ramana (trzeci człon w równaniu. (4.9).

Schemat przejść kwantowych w wymuszonym rozpraszaniu Ramana (Rys.4.4) nie różni się niczym od schematu dla spontanicznego rozpraszania Ramana (Rys.4.2).



Rys. 4.4 Schemat wymuszonego rozpraszania Ramana

Różnica polega na tym, że padająca wiązka laserowa o częstości ω_L ma duże natężenie więc generuje więc silną wiązkę stokesowską o częstości $\omega_s = \omega_L - \omega_{wib}$. Wiązka stokesowska z kolei wymusza dodatkowe rozproszenie stokesowskie dla cząstek znajdujących się w stanie wirtualnym o energii E . Zachodzi tutaj pełna analogia do zjawisk emisji spontanicznej i wymuszonej zachodzących w typowym laserze. Różnica polega na tym, że w normalnym laserze rozważane poziomy energetyczne są stacjonarnymi stanami kwantowymi, między którymi zachodzi absorpcja, emisja spontaniczna i emisja wymuszona. Gdy dwie wiązki o dużym natężeniu ω_L i ω_s światła padającego i rozproszonego jednocześnie padają na cząsteczki układu to jednoczesne oddziaływanie cząsteczek z wiązkami o częstości ω_L i ω_s prowadzi do generowania drgań spójnych w fazie o częstości $\omega_{wib} = \omega_L - \omega_s$. Oznacza to, że wszystkie cząsteczki układu drgają w takiej samej fazie z częstością ω_{wib} , gdyż efekty oddziaływań międzycząsteczkowych lub wewnątrz cząsteczkowych zaburzających tę spójność są zanedbywalnie małe w porównaniu z silnymi oddziaływaniami między cząsteczką a polami elektrycznymi wiązek o częstości ω_L i ω_s .

W podobny sposób generowane jest wymuszone rozpraszanie antystokesowskie. W spontanicznym efekcie Ramana natężenie rozpraszania antystokesowskiego jest słabe, bo obsadzenie wibracyjnych poziomów wzbudzonych jest niewielkie, co wynika z rozkładu Boltzmanna. Oświetlenie układu cząsteczek silną wiązką o częstości ω_L powoduje, że boltzmannowski rozkład obsadzeń zostaje naruszony. W rezultacie więcej cząsteczek znajduje się we wzbudzonym stanie wibracyjnym generując wymuszone rozpraszanie antystokesowskie o dużym natężeniu.

Wymuszone rozpraszanie Ramana jest szczególnym przypadkiem oddziaływania czterech fotonów (ang. *four - wave interaction*):

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 \pm \omega_3, \quad (4.10)$$

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = 0. \quad (4.11)$$

Przypadek opisany równaniami (4.10) i (4.11) może oznaczać oddziaływanie 3 wiązek wejściowych $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ i jednej wyjściowej ω_4 , ale również może oznaczać jak to ma miejsce dla wymuszonego rozpraszania Ramana.

Dwukrotne oddziaływanie wiązki tego samego typu ($\omega_1 = \omega_2$ lub $\omega_1 = \omega_3$). Rzeczywiście, oddziaływanie czterofotonowe dla wymuszonego rozpraszania stokesowskiego można zapisać jako

$$\omega_4 = \omega_s = \omega_L - \omega_{wib} = \omega_L - (\omega_L - \omega_s) = \omega_L + \omega_s - \omega_L \quad (4.12)$$

czyli
$$\omega_4 = \omega_s; \omega_1 = \omega_L; \omega_2 = \omega_s; \omega_3 = -\omega_L. \quad (4.13)$$

Natężenie wymuszonego rozpraszania stokesowskiego I_S^w wyraża się wzorem [6]

$$I_S^w = A \cdot (\chi^{(3)})^2 I_L^2 I_S l^2 \left(\frac{\sin \Delta k l / 2}{\Delta k l / 2} \right)^2 \quad (4.14)$$

gdzie A jest pewna stałą, I_L i I_S są natężeniami wiązki padającej (pompującej) i wiązki rozpraszania stokesowskiego, l jest długością drogi optycznej.

Z kolei, wymuszone rozpraszanie antystokesowskie można opisać jako następujące oddziaływanie czterofotonowe

$$\omega_{AS} = \omega_L + \omega_{wib} = \omega_L + (\omega_L - \omega_s), \quad (4.15)$$

czyli
$$\omega_4 = \omega_{AS}; \omega_1 = \omega_L; \omega_2 = \omega_L; \omega_3 = -\omega_s. \quad (4.16)$$

Natężenie wymuszonego rozpraszania antystokesowskiego I_{AS}^w wyraża się wzorem [6]

$$I_{AS}^w = A \cdot (\chi^{(3)})^2 I_L^2 I_S l^2 \left(\frac{\sin \Delta k l / 2}{\Delta k l / 2} \right)^2. \quad (4.17)$$

Choć formalnie wyrażenia (4.14) i (4.17) niczym się nie różnią, to należy zauważyć, że warunek dopasowania fazowego Δk jest różny dla wymuszonego rozpraszania stokesowskiego i antystokesowskiego. Ze wzoru (4.12) wynika, że dla wymuszonego rozpraszania stokesowskiego warunek dopasowania fazowego ma następującą postać

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_S - \mathbf{k}_L - \mathbf{k}_S = 0, \quad (4.18)$$

czyli spełniony jest zawsze, dla dowolnych kierunków propagacji wymuszonego rozpraszania stokesowskiego. Wynika to z faktu, że dopasowanie fazowe między wiązką pompującą ω_L , wiązką stokesowską ω_s i wibracjami ustalane jest automatycznie.

W przypadku rozpraszania antystokesowskiego warunek dopasowania fazowego przybiera postać wynikającą ze wzoru (4.15)

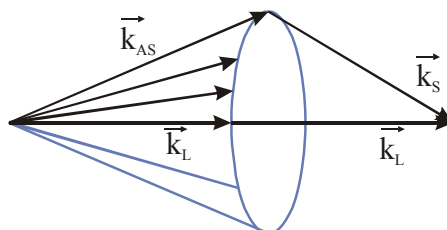
$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_L - \mathbf{k}_S - \mathbf{k}_{AS} = 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_S - \mathbf{k}_{AS}.$$

(4.19)

Oznacza to, że warunek dopasowania fazowego jest spełniony tylko dla takich kierunków, dla których spełniona jest zależność

$$\mathbf{k}_{AS} = 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_S. \quad (4.20)$$

Z zależności (4.20) wynika, że kierunek propagacji fali wymuszonego rozpraszania antystokesowskiego ograniczony jest do powierzchni stożka, którego oś jest równoległa do kierunku padającej wiązki laserowej (Rys. 4.5).



Rys.4.5 Kierunki propagacji wymuszonego rozpraszania antystokesowskiego

Dlaczego warunek dopasowania fazowego, $\Delta\mathbf{k} = 0$, spełniony zawsze dla wymuszonego rozpraszania stokesowskiego, nie jest realizowany automatycznie dla wymuszonego rozpraszania antystokesowskiego? Wynika to z faktu, że faza drgających cząsteczek jest zdominowana przez bardziej intensywne rozpraszanie stokesowskie.

Podsumowując, intensywne światło o częstości ω_L może wywołać intensywne wymuszone rozpraszanie Ramana: stokesowskie $\omega_S = \omega_L - \omega_{wib}$ i antystokesowskie $\omega_{AS} = \omega_L + \omega_{wib}$. Pod wpływem oddziaływania materii z fotonami następuje wymiana energii poprzez fonony optyczne (lub wibracje) w wyniku czego powstaje w ośrodku polaryzacja trzeciego rzędu $P^{(3)} \propto \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l$, zawierająca składowe zmieniające się z częstością $\omega_{wib} = \omega_L - \omega_S$, $\omega_S = \omega_L - \omega_{wib}$ oraz $\omega_{AS} = \omega_L + \omega_{wib}$. Składowe polaryzacji powodują generację nowych fal o częstości ω_S i ω_{AS} . Jest to wymuszone rozpraszanie Ramana stokesowskie i antystokesowskie. Dla promieniowania stokesowskiego warunek dopasowania fazowego spełniony jest dla wszystkich kierunków ($\Delta\mathbf{k} = 0$), czyli światło rozproszone emitowane jest we wszystkich kierunkach. Wymuszone rozpraszanie antystokesowskie obserwuje się w kierunkach \mathbf{k}_{AS} , dla których spełniony jest warunek dopasowania fazowego $2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_S = \mathbf{k}_{AS}$.

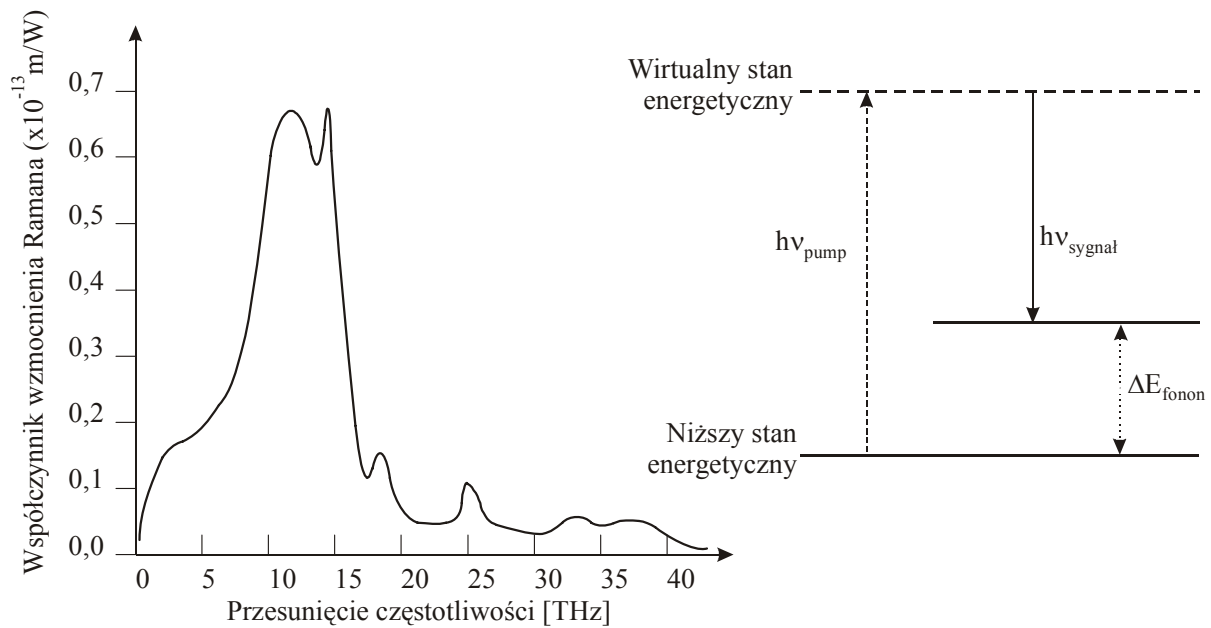
W transmisji światłowodowej **wymuszone rozpraszanie Ramana** (ang. stimulated Raman scattering SRS) wywiera skutki zarówno negatywne jak i pozytywne. Największą korzyścią wynikającą z wymuszonego rozpraszania Ramana jest **wzmocnienie optyczne Ramana**.

Wzmocnienie optyczne Ramana zachodzi w ośrodku na skutek wymuszonego rozpraszania Ramana. Jeżeli do ośrodka wprowadzimy dwie wiązki, jedną zwaną pompującą o częstotliwości ω_L oraz drugą zwaną pompującą o częstotliwości Stokesa $\omega_S = \omega_L - \omega_{vib}$, to na skutek wymuszonego rozpraszania Ramana następuje wzmocnienie wiązki sondującej Stokesa ω_S .

Stosując dotychczasowe rozważania dla światłowodu możemy spodziewać się, że wymuszone rozpraszanie Ramana wzmacnia sygnał wejściowy w światłowodzie w taki sam sposób, jak dzieje się to w erbowych wzmacniaczach optycznych EDFA. Najistotniejszą różnicą jest to, że wiązka sondująca zostaje wzmocniona poprzez zjawisko wymuszonego rozpraszania Ramana długość fali zostaje przesunięta do dłuższych fal (składowa Stokesa) $\omega_S = \omega_L - \omega_{vib}$ względem wiązki pompującej ω_L , gdzie ω_{vib} jest częstotliwością drgań wibracyjnych cząsteczek, z których zbudowany jest światłowód (szkło lub domieszki). Drgania wibracyjne ω_{vib} obejmują fonony optyczne (międzycząsteczkowe drgania sieci) i wewnątrz cząsteczkowe drgania cząstek.

Światłowody mogą wzmacniać słaby sygnał o określonej częstotliwości ω_S , jeżeli jednocześnie zostanie wprowadzone silne światło pompujące o częstotliwości ω_L , takie że różnica częstotliwości $\omega_L - \omega_S$ jest równa częstotliwości wibracyjnej cząsteczek materiału światłowodu. Maksimum wzmocnienia Ramana występuje dla przypadku, gdy różnica ta jest równa maksimum widma wibracyjnego, zwanego widmem wzmocnienia Ramana. Dla szklanego światłowodu maksimum widma wibracyjnego wynosi około 440 cm^{-1} (13.2 THz) i odpowiada drganiu wibracyjnemu krzemionki SiO_2 (Rys.4.6). Pasma drgania wibracyjnego szklanego światłowodu jest szerokie (około 5 THz), bowiem szkło jest amorficznym, niekryształicznym materiałem i wykazuje niehomogeniczne poszerzenie pasma Ramana. Wzmocnienie Ramana następuje po uzyskaniu pewnej wartości progowej, podobnie jak to ma miejsce dla akcji laserowej.

Oszacujemy wielkość mocy progowej potrzebnej do przekroczenia wartości progowej wzmocnienia Ramana.



Rys.4.6 Widmo Ramana dla stopionej krzemionki SiO_2 . Jest to jednocześnie profil współczynnika wzmocnienia Ramana g_R , zastosowana długość fali dla wiązki pompującej wynosi $\lambda_p=1550 \text{ nm}$ [9]

Rozważmy oddziaływanie między falą pompującą ω_L i falą Stokesa ω_s o natężeniach I_p oraz I_s , odpowiednio. Załóżmy, że fale są falami ciągłymi (ang. continuous wave, CW) lub quasi-CW), wtedy oddziaływanie można opisać w postaci układu równań

$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_p I_s - \alpha_s I_s \quad (4.21.a)$$

$$\frac{dI_p}{dz} = -\frac{\omega_p}{\omega_s} g_R I_p I_s - \alpha_p I_p \quad (4.21.b)$$

Człon $g_R I_p I_s$ opisuje wzrost natężenia fali Stokesa, gdzie g_R jest związane z przekrojem czynnym na rozpraszanie spontanicznie Ramana [10], a bardziej precyzyjnie – z urojoną częścią podatności elektrycznej trzeciego rzędu $\chi_{ijkl}^{(3)}$ w równaniu (4.9), α_s , α_p są współczynnikami opisującymi straty w światłowodzie dla fali Stokesa i fali pompującej. Równania (4.21.a – 4.21.b) można precyzyjnie wyprowadzić z równań Maxwella, ale można je również zrozumieć intuicyjnie jako równania fenomenologiczne opisujące procesy zmiany liczby fotonów w obu wiązках.

Widać to szczególnie wyraźnie dla przypadku, gdy zaniedbamy starty, wtedy równanie (4.21) przyjmuje postać

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_s}{\omega_s} + \frac{I_p}{\omega_L} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Równanie to stwierdza po prostu, że całkowita liczba fotonów pozostaje stała w procesie SRS.

Aby otrzymać wyrażenie na wartość progową natężenia wiązki pompującej I_p , należy rozwiązać układ równań (4.21.a – 4.21.b). Dla uproszczenia założmy, że zaniedbujemy zmniejszanie natężenia wiązki pompującej w trakcie pompowania, czyli zakładamy, że równanie (4.21.b) przyjmuje postać

$$\frac{dI_p}{dz} = -\alpha_p I_p \quad (4.23)$$

Rozwiązując (4.23) i wstawiając do (4.21.a) otrzymujemy

$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_0 \exp(-\alpha_p z) I_s - \alpha_s I_s \quad (4.24)$$

gdzie I_0 jest intensywnością wiązki pompującej na początku drogi pompowania dla $z=0$.

Rozwiązując (4.24) otrzymujemy

$$I_s(L) = I_s(0) \exp(g_R I_0 L_{eff} - \alpha_s L) \quad (4.25)$$

gdzie L jest długością włókna światłowodowego, zaś L_{eff} ma sens efektywnej długości włókna światłowodowego, która uwzględnia absorpcję wiązki pompującej w światłowodzie

$$L_{eff} = \frac{[1 - \exp(-\alpha_p L)]}{\alpha_p} \quad (4.26)$$

Równanie (4.25) mówi, że jeżeli w miejscu wstrzykiwania wiązki pompującej ($Z=0$) intensywność wiązki pompującej wynosi $I_s(0)$, to podczas propagacji w światłowodzie w odległości $Z=L$ osiąga wartość $I_s(L)$. W praktyce, proces wymuszonego rozpraszania Ramana zachodzi na całej drodze propagacji wiązki pompującej i po przebyciu odległości L osiąga wartość $I_s(L)$.

Dotychczas analizowaliśmy sytuację, gdy w procesie SRS generowane są fotony o jednej częstotliwości ω . W rzeczywistości, proces SRS wzmacnia wszystkie słabe sygnały o częstotliwościach z zakresu pasma Ramana (Rys.4.6), jednocześnie jeżeli tylko różnica częstotliwości światła pompującego i światła transmitowanego leży w obszarze widma wzmocnienia

Ramana $J_R(\omega_L - \omega)$. Dlatego równanie (4.25) należy zastąpić przez wyrażenie całkujące po obszarze pasma wzmocnienia Ramana

$$P_s(L) = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar \omega \exp[g_R(\omega_p - \omega)I_0L_{eff} - \alpha_s L] d\omega \quad (4.27)$$

gdzie $P_s(L)$ jest mocą wiązki Stokesa na końcu włókna o długości L .

Aby rozwiązać (4.27) należy znać szczegółową zależność $g_R = g_R(\Omega)$, gdzie $\Omega = \omega_p - \omega$. Ponieważ zazwyczaj jest ona nieznana rozwijamy $g_R = g_R(\Omega)$ w szereg Taylora wokół maksimum pasma Stokesa $\omega = \omega_s$ i po podstawieniu rozwinięcia otrzymujemy [12]

$$P_s(L) = P_{s0}^{eff} \exp[g_R(\Omega_R)I_0L_{eff} - \alpha_s L] \quad (4.28)$$

gdzie

$$P_{s0}^{eff} = \hbar \omega_s B_{eff} \quad (4.29)$$

$$B_{eff} = \left(\frac{2\pi}{I_0 L_{eff}} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 g_R}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_s}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

W rzeczywistości B_{eff} , która ma sens efektywnej szerokości pasma Stokesa, zależy również od intensywności pompowania oraz długości włókna L , ale wyrażenie (4.29) możemy traktować jako dobre przybliżenie pierwszego rzędu do określenia mocy progowej.

Moc progowa dla wzmocnienia Ramana określamy jako moc wejściową wiązki pompującej, która powoduje, że moc wiązki Stokesa staje się równa mocy pompującej na końcu włókna o długości L [11]

$$P_s(L) = P_p(L) \equiv P_0 \exp(-\alpha_p L) \quad (4.31)$$

gdzie $P_0 = I_0 A_{eff}$, zaś A_{eff} jest powierzchnią efektywną rdzenia światłowodu zdefiniowana wzorem

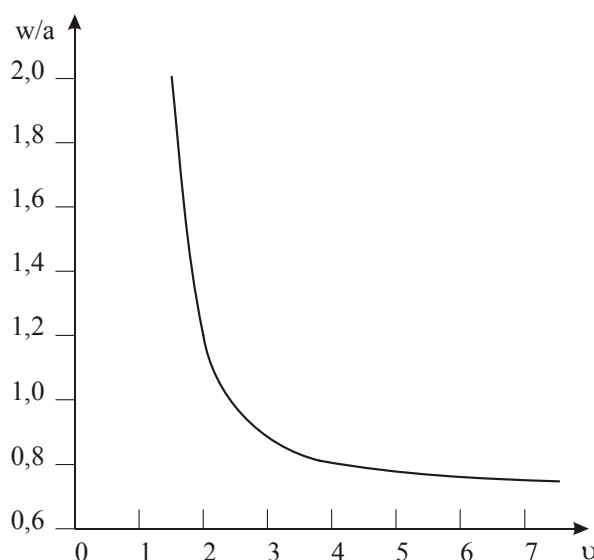
$$A_{eff} = \frac{\left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int \int |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (4.32)$$

Dla poprzecznego rozkładu pola opisanego rozkładem Gaussa

$$A_{eff} = \pi w^2 \quad (4.33)$$

gdzie w jest szerokością rozkładu Gaussa. Wielkość w zależy od typu rozchodzącego się modu oraz od promienia rdzenia a i współczynników załamania rdzenia \tilde{n}_1 i płaszczka \tilde{n}_2 . Można ją obliczyć z wykresu przedstawionego na rysunku 4.7 w funkcji częstotliwości znormalizowanej ν omawianej w rozdziale 1

$$\nu = \frac{\pi a}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}_2^2} \quad (4.34)$$



Rys.4.7 Zależność parametru w charakteryzującego szerokość rozkładu Gaussa od częstotliwości znormalizowanej ν [13]

We wzorze (4.34) należy uwzględnić fakt, że zjawiska wymuszonego rozpraszania Ramana są nieliniowe. Oznacza to również że współczynniki załamania rdzenia i płaszczka we wzorze (4.34) są nieliniowe. W nieliniowym zakresie należy zastosować nieliniową stałą dielektryczną [14]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (4.35)$$

a w konsekwencji nieliniowy współczynnik załamania \tilde{n} i nieliniowy współczynnik absorpcji $\tilde{\alpha}$ wyrażają się wzorami

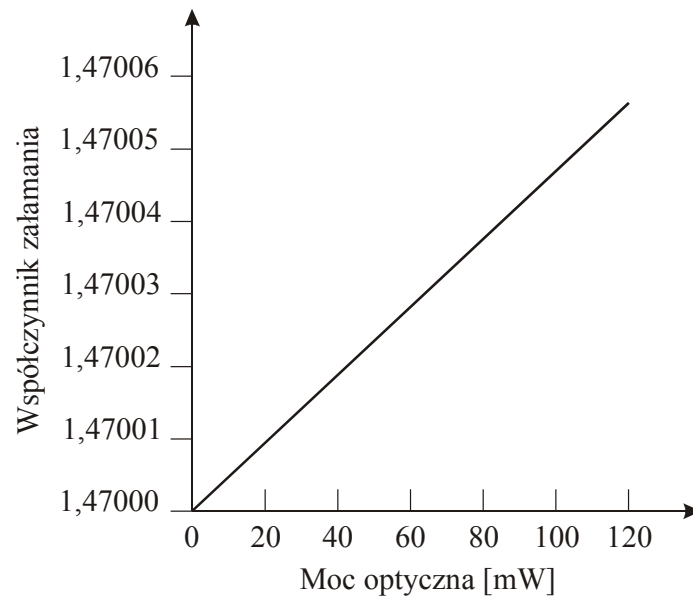
$$\tilde{n} = n + n_2 |E|^2 \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha |E|^2 \quad (4.36)$$

gdzie

$$n_2 = \frac{3}{8n} \operatorname{Re}(\chi_{xxx}^{(3)}) \quad \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \operatorname{Im}(\chi_{xxx}^{(3)}) \quad (4.37)$$

Rysunek 4.8 opisuje zależność współczynnika załamania szkła krzemionkowego w funkcji mocy optycznej. Widzimy, że zmiany te są niewielkie, ale biorąc pod uwagę ogromną

długość światłowodu rzędu setek kilometrów, efekt ten zaczyna być znaczący i niemożliwy do zaniedbania.



Rys.4.8 Zależność współczynnika załamania szkła krzemionkowego w funkcji mocy optycznej.

Typowe wartości wynoszą około $n_2 \approx 2.6 \times 10^{-20} m^2 / W$, $A_{eff} \approx 20 - 100 \mu m^2$ dla $\lambda_p = 1550 nm$, co pozwala oszacować znormalizowaną częstotliwość (4.34) gdy znamy wymiary rdzenia, długość fali transmitowanej λ_0 oraz liniowe współczynniki załamania n_1 i n_2 rdzenia i płaszczka. Znając \mathcal{G} z wykresu (Rys.4.7) można wyznaczyć W , a następnie A_{eff} . Typowe wartości A_{eff} wynoszą $50 \mu m^2$.

Wstawiając (4.28) do (4.31) i zakładając $\alpha_s \approx \alpha_p$ otrzymujemy

$$P_{s0}^{eff} \exp\left(\frac{g_R P_0 L_{eff}}{A_{eff}}\right) = P_0 \quad (4.38)$$

gdzie P_{s0}^{eff} zależy także od P_0 przez wzór (4.30).

Równania (4.38) pozwala wyznaczyć wartość progową dla wzmocnienia Ramana P_0 , aby jednak wyznaczyć P_0 należy znać postać funkcji wzmocnienia Ramana g_R .

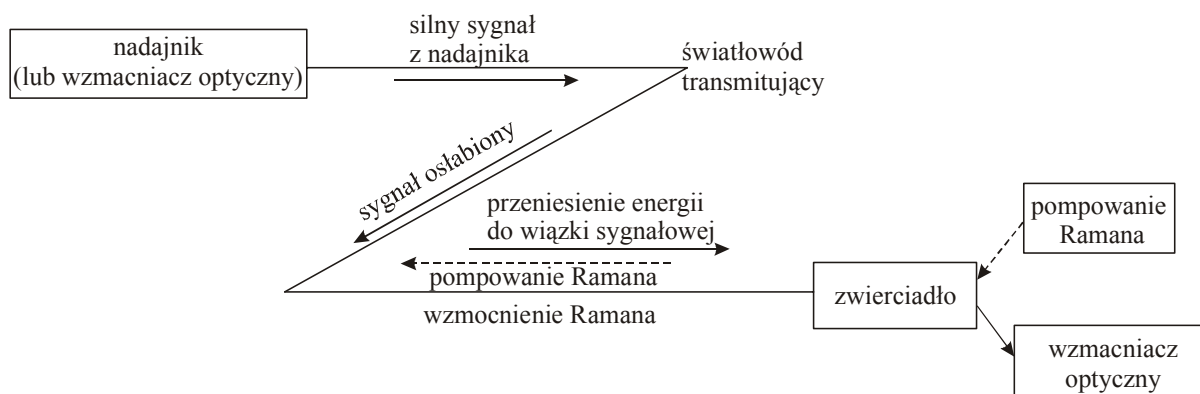
Zakładając, że widmo wzmocnienia Ramana g_R ma kształt funkcji Lorentza otrzymujemy [11]

$$\frac{g_R P_0^{cr} L_{eff}}{A_{eff}} \approx 16 \quad (4.39)$$

Równanie (4.39) pozwala wyznaczyć wartość progową P_0^{cr} powyżej której rozpoczyna się zjawisko wzmocnienia spowodowanego wymuszonym rozpraszaniem Ramana. Wzór (4.39) opisuje przypadek pompowania o kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji wiązki sygnałowej. Gdy zastosowane zostanie pompowanie wsteczne wartość 16 należy zastąpić przez 20. Oszacujmy moc progową Ramana P_0^{cr} ze wzoru 4.39. $\lambda_p = 1550nm$, $A_{eff} = 50\mu m^2$, dla długich światłowodów $\alpha_p L \gg 1$ i $L_{eff} \approx 1 / \alpha_p$, $\alpha_p \approx 0,2dB / km$, stąd $L_{eff} \approx 20km$. Tak więc moc progowa Ramana wynosi $P_0^{cr} \approx 600mW$. Ponieważ typowe moce w jednakowych systemach światłowodowych wynoszą około 10mW, we wzmacniaczach optycznych EDFA są rzędu 100mW, więc leżą poniżej typowych mocy progowych powyżej których zachodzi wymuszone wzmocnienie Ramana.

Zjawiska wymuszonego rozpraszania Ramana zostały wykorzystane we wzmacniaczach Ramana. Po roku 2000 prawie wszystkie systemy dalekozasięgowe definiowane jako systemy przesyłające na odległość rzędu 300 do 800 km oraz ultradalekozasięgowe (ponad 800 km) wykorzystują zjawisko Ramana, zastępując najbardziej popularne w latach 90 tych wzmacniacze erbowe EDFA.

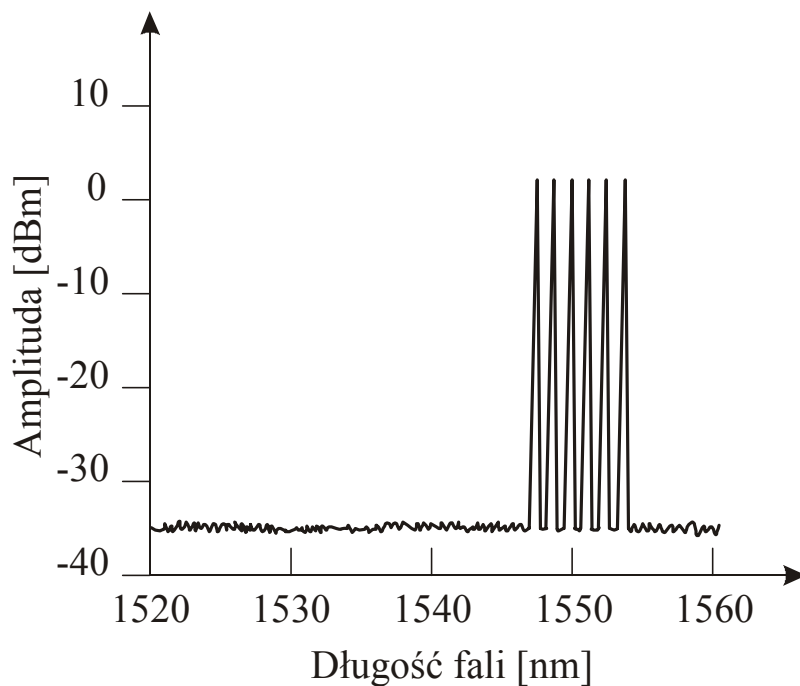
Pompowanie wsteczne stosuje się w konfiguracjach typu DFA (ang. DFA, distributed fiber amplification) w których wzmocnienie Ramana zachodzi w końcowej długości światłowodu, tuż przed detektorem lub wzmacniaczem EDFA. (Rys.4.8). Wiązka pompująca jest wprowadzona do światłowodu przez sprzęgacz, i wędruje w przeciwnym kierunku niż wiązka sygnałowa.



Rys.4.8 Konfiguracja stosowana w światłowodach z zastosowaniem wzmacniaczy Ramana (DFA), na podstawie[3]

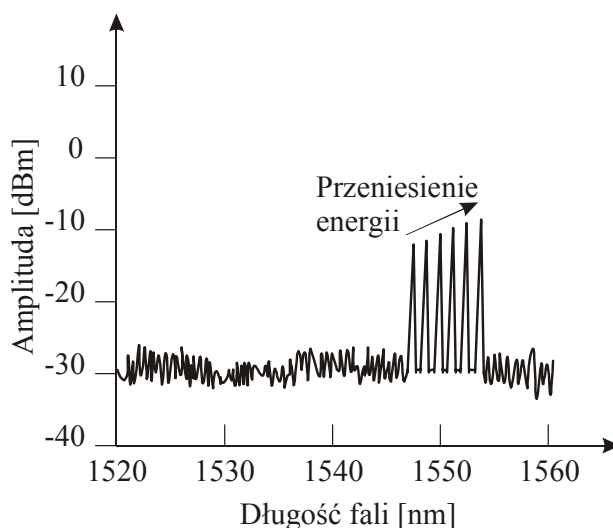
Dla światłowodu zbudowanego ze szkła SiO_2 widmo Ramana przedstawiono na rysunku 4.6. Jak widać z rysunku 4.6, maksimum pasma Ramana wynosi $\omega_{vib} = 13.19$ THz (co odpowiada częstoci drgania wibracyjnego krzemionki SiO_2 440 cm^{-1} wyrażonej w liczbach falowych używanych zazwyczaj w spektroskopii Ramana). Oznacza to, że jeżeli jako wiązkę pompującą ω_L zastosujemy 1550 nm, to maksimum wzmocnionej wiązki stokesowskiej $\omega_S = \omega_p - \omega_{vib}$ będzie wynosić 1661.5 nm, czyli zostanie przesunięta w stosunku do wiązki pompującej do dłuższych fal o około 111.5 nm. Maksimum wzmocnienia otrzymamy, gdy wiązka pompująca i sygnałowa mają te same polaryzacje. Należy podkreślić, że położenie maksimum pasma wibracyjnego Ramana nie zależy od wiązki sygnałowej.

Do tej pory omówiliśmy pozytywne skutki wykorzystania wymuszonego rozpraszania Ramana do wzmocnienia transmitowanego sygnału. Zjawisko wymuszonego rozpraszania Ramana niesie jednak również w niektórych przypadkach negatywne skutki uboczne. Omówimy tutaj niektóre z nich. Z natury zjawiska rozpraszania Ramana wynika, że fale o wyższych częstociach zmniejszają swoją moc na skutek oddania energii optycznym fononom oraz wewnątrzcząsteczkowym wibracjom, a na ich miejsce powstają fale o niższych częstociach. Oznacza to, że w światłowodzie, czy tego chcemy czy też nie, powstanie nowa fala o większej długości. Jeżeli moc światła nie przekracza wartości progowej P_0 (dla typowych światłowodów rzędu 600 mW-1 W) promieniowanie o większej długości fali występuje jako spontaniczne rozpraszanie Ramana o małej mocy. Po przekroczeniu wartości progowej P_0 powstaje wymuszone rozpraszanie Ramana, dla fal dłuższych, kosztem gwałtownego zmniejszenia mocy sygnału. Tak długo, jak długo transmisja optyczna jest jednokanałowa (praca na jednej długości fali) wymuszone rozpraszanie Ramana nie zaburza pracy systemu, choć wpływa oczywiście na powstanie szumu pochodzącego od wymuszonego rozpraszania Ramana, Sytuacja zmienia się zasadniczo w systemach transmisji wielokanałowej (WDM). Jeżeli do światłowodu wprowadzimy dwie fale, których częstotliwości różnią się o wielkości ω_{vib} , to moc fali dłuższej λ_2 (fali sondującej) będzie rosła kosztem mocy fali krótszej λ_1 (fali pompującej). Oznacza to, że kanały transmitujące fale dłuższe λ_2 będą wzmacniane kosztem kanałów o mniejszej długości fali. Może to prowadzić do zupełnej degradacji systemu transmisji wielokanałowej.



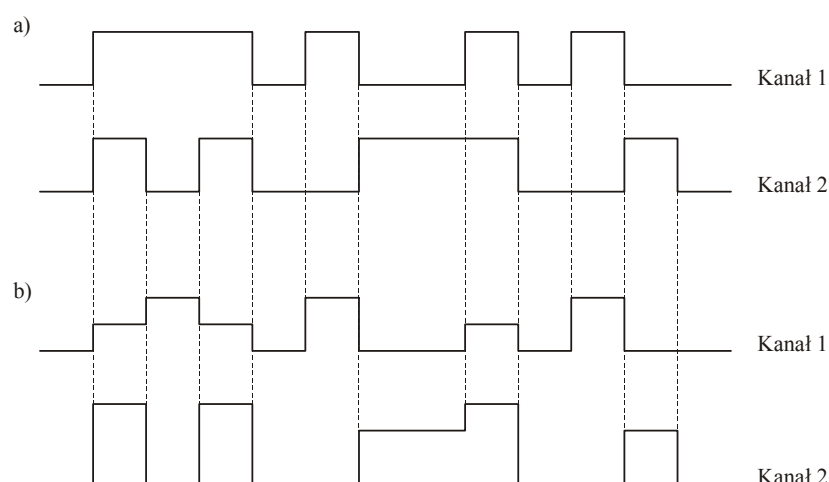
Rys.4.9 Schematyczne widmo dla systemu DWDM złożonego z 6 kanałów (6 długości fali) bez efektu wymuszonego rozpraszania Ramana

Rysunek 4.9 ilustruje widmo dla przykładowego systemu DWDM złożonego z 6 kanałów (6 długości fali) w oknie 1550 nm bez występowania efektu wymuszonego rozpraszania Ramana. Rysunek 4.10 przedstawia to samo widmo zniekształcone przez efekt wymuszonego rozpraszania Ramana (SRS).



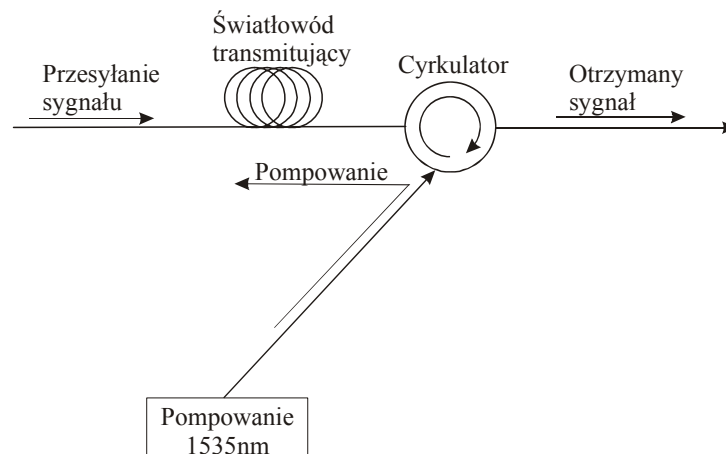
Rys.4.10 Widmo dla przykładowego systemu DWDM złożonego z 6 kanałów (6 długości fali) zniekształcone przez efekt wymuszonego rozpraszania Ramana

Z rysunku 4.10, widać, że kanały o krótszych długościach fali mają znacznie niższe amplitudy niż kanały odpowiadające falom dłuższym, a ponadto wyraźnie wzrosły szумы. Efekt wzajemnego oddziaływania kanałów poprzez SRS jest zanedbywalny dopiero wtedy, gdy kanały są oddzielone o więcej niż 13,19 THz. Częstość ta odpowiada maksimum pasma Ramana i odpowiada częstości drgania wibracyjnego krzemionki 440 cm^{-1} . Oznacza to, że jeżeli jako wiązkę pompującą λ_1 o częstości ω_L zastosujemy 1550 nm, to wzmocniona wiązka stokesowska $\omega_S = \omega_L - \omega_{vib}$ powstaje dla fal dłuższych o około 113.6 nm, czyli w liczbach bezwzględnych 1663.6 nm, co odpowiada odstępowi między kanałami 13,19 THz. Składowa Stokesa powstaje w całym zakresie widmowym pasma Ramana $\Delta\nu_R \approx 5\text{THz}$ z maksimum dla 13,19 THz i obejmuje szeroki zakres fononów optycznych o częstościach mniejszych i większych niż częstości drgania SiO_2 , 440 cm^{-1} odpowiadająca maksimum wzmocnienia Stokesa. Rysunek 4.11 ilustruje wpływ SRS na transmisję sygnałów binarnych. Rysunek 4.11a pokazuje sekwencje bitów w dwóch kanałach przy transmisji nie zaburzonej przez SRS. Rysunek 4.11b przedstawia sygnały binarne w obu kanałach zaburzone przez SRS. Zauważmy, że tylko wtedy gdy w którymkolwiek kanale wartość bitu jest zerowa, SRS nie wprowadza zmian. Gdy oba kanały nadają bity niezerowe, moc kanału sondującego (λ_2) rośnie kosztem mocy kanału pompującego (λ_1). W kanale pompującym maleje moc niektórych bitów, prowadzi to zmniejszenia stosunku mocy sygnału do szumu, a w konsekwencji wzrost **elementowej stopy błędów**.



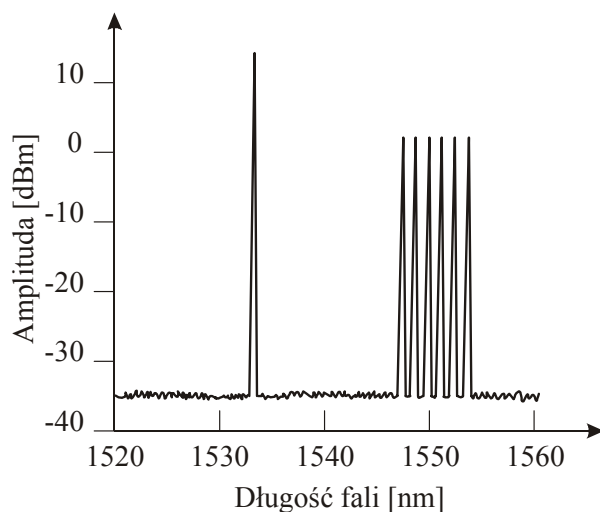
Rys.4.11 Wpływ SRS na transmisję sygnałów binarnych, a) sekwencje binarne nadawane w kanałach 1 i 2 bez SRS, b) sekwencje binarne nadawane w kanałach 1 i 2 zmienione przez efekt SRS

W celu poprawienia jakości transmisji wielokanałowej DWDM zniekształconej przez efekt wymuszonego rozpraszania Ramana (Rys.4.10), należy wzmacnić amplitudy kanałów, które oddały energię fononom optycznym i wibracjom. Można tego dokonać wykorzystując to samo zjawisko wymuszonego rozpraszania Ramana we wzmacniaczach optycznych Ramana. Rysunek 4.8 przedstawia jedną z możliwych konfiguracji wzmacniacza optycznego Ramana z pompowaniem wstecz (ang. backward pumped Raman optical amplifier). Szczególnym przypadkiem takiego wykorzystania lasera pompującego (1535 nm) i cyrkulatora, jest przedstawiony na rysunku 4.12. Cyrkulator wstrzykuje światło w kierunku przeciwnym do kierunku propagacji wiązki sygnałowej.



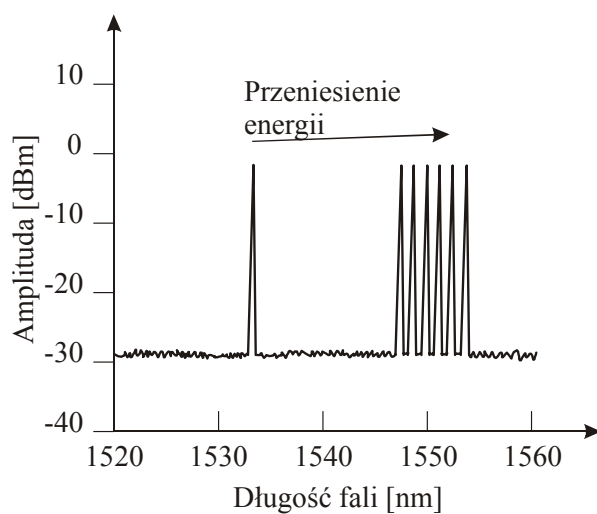
Rys.4.12 Typowa konfiguracja wzmacniacza Ramana

Innym rozwiązaniem jest pompowanie w kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji wiązki sygnałowej (ang. Forward pumped Raman optical amplifier) na początku traktu światłowodowego, w pobliżu nadajnika, nie zaś detektora. Schematyczne widmo zastosowanej wiązki pompującej 1535 nm przedstawiono na rysunku 4.13. Widać, że moc wiązki pompującej 1535 nm jest dużo silniejsza niż moc składowych wymuszonego rozpraszania Ramana.



Rys.4.13 Schematyczne widmo wzmacniacza optycznego Ramana

Po wzmocnieniu Ramana za pomocą światła pompującego 1535 nm, wszystkie kanały ulegają wzmocnieniu o około 10 dB (Rys.4.14) i amplitudy są ponownie jednakowe (porównaj z Rys.4.10). Dzieje się to kosztem energii wiązki pompującej 1535 nm, która wyraźnie zmalała w porównaniu z sytuacją na rysunku 4.13.



Rys.4.14 Schematyczne widmo dla przykładowego systemu DWDM złożonego z 6 kanałów (6 długości fali) po wzmocnieniu we wzmacniaczu optycznym Ramana stosując pompowanie światłem o długości fali 1535 nm

4.4. Wymuszone rozpraszanie Brillouina (ang. stimulated Brillouin scattering, SBS)

Rozpraszanie Brillouina oraz wymuszone rozpraszanie Brillouina (SBS) można formalnie opisać w bardzo podobny sposób, jak rozpraszanie Ramana. Fala o częstości ω_L może wywołać wymuszone rozpraszanie Brillouina o składowej stokesowskiej $\omega_S = \omega_L - \omega_{fa}$ gdzie ω_{fa} jest częstością fononu akustycznego. Pod wpływem oddziaływania materii z fotonami światła następuje wymiana energii poprzez fonony akustyczne w wyniku czego powstaje w ośrodku polaryzacja trzeciego rzędu $P^{(3)} \propto \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l$. Podstawową różnicą między SBS i SRS jest fakt, że promieniowanie oddziałuje z fononami akustycznymi, nie zaś fononami optycznymi czy wewnątrzcząsteczkowymi wibracjami jak to ma miejsce dla rozpraszania Ramana SRS. Fonony akustyczne mają dużo niższe częstości niż fonony optyczne. Częstość fononu akustycznego wyraża się wzorem

$$\omega_{fa} = \frac{4\pi n v_s}{\lambda} \quad (4.40)$$

gdzie v_s jest prędkością dźwięku w światłowodzie, n jest współczynnikiem załamania. Korzystając ze wzoru (4.40) można wyznaczyć typową częstość fononu akustycznego, która wynosi 69 GHz dla długości fali 1550 nm. Przypomnijmy, dla porównania częstość wibracyjna krzemionki SiO_2 wynosi 13,19 THz w zjawisku wymuszonego rozpraszania Ramana.

Rozpraszanie Brillouina staje się wymuszonym rozpraszaniem Brillouina, gdy zostanie przekroczona wartość progowa pompowania. Następuje wtedy gwałtowne wzmocnienie składowej Stokesa. Pasma wzmocnienia Brillouina jest dużo węższe niż pasmo Ramana i wynosi tylko około $\Delta\nu_B = 20$ MHz dla 1550 nm. Dla porównania pasmo wzmocnienia Ramana jest stosunkowo szerokie i wynosi około $\Delta\nu_R = 5$ THz. Oznacza to, że największe wzmocnienie (najniższa wartość progowa) ma miejsce dla źródeł o szerokości widmowej mniejszej niż 20 MHz. Rzeczywiście, wartość progowa silnie zależy od szerokości spektralnej źródła światła. Im bardziej monochromatyczne źródło, tym niżej położony próg na wzmocnienie SBS. Dla bardzo wąskich linii o szerokości 10 MHz wartość progowa wynosi od +4dBm do +6dBm dla 1550 nm. Rysunek 4.15 ilustruje zależność

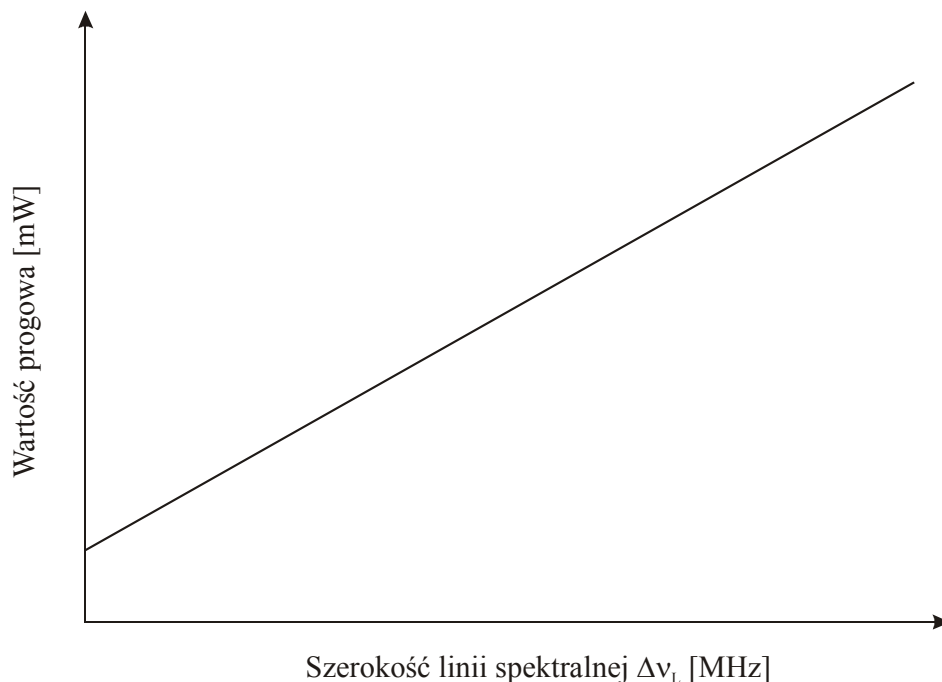
wartości progowej od szerokości linii spektralnej źródła $\Delta\nu_L$. Poszerzenie linii spektralnej źródła $\Delta\nu_L$ powoduje zredukowanie efektu wymuszonego rozpraszania Brillouina

$$g = g_B \frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_L} \quad (4.41)$$

Obliczenia podobne do tych jakie przeprowadziliśmy dla wartości progowej P_0^{cr} w wymuszonym rozpraszaniu Ramana pozwalają otrzymać zależność [15]

$$P_0^{cr} = \frac{21A_{eff}}{g_B L_{eff}} \quad (4.42)$$

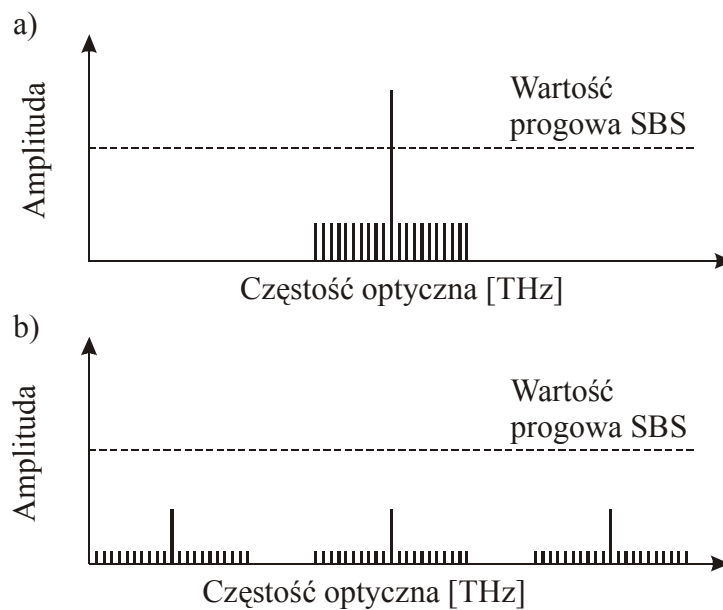
Podstawiając typowe parametry światłowodów ($L_{eff}=20\text{km}$, $A_{eff} = 50\mu\text{m}^2$, $g_B = 5 \times 10^{-11} \text{ m / W}$) otrzymujemy wartość progową dla wymuszonego rozpraszania Brillouina $P_0^{cr} \approx 1 \text{ mW}$. Przy tak niskim progu, proces SBS jest wszechobecny i jest głównym procesem nieliniowym w światłowodach. Moc progowa nie zależy więc od liczby kanałów, występuje zarówno w systemach jednokanałowych i wielokanałowych.



. Rys.4.15 Zależność wartości progowej od szerokości linii spektralnej

Choć mechanizmy wymuszonego rozpraszania Ramana i Brillouina są formalnie podobne, to istnieje kilka zasadniczych różnic. Po pierwsze, współczynnik wzmocnienia $g_B \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} / \text{W}$ dla rozpraszania Brillouina jest około dwa rzędy większy niż odpowiedni współczynnik dla rozpraszania Ramana. Oznacza to, że moce rzędu kilku mW wystarczą do wygenerowania efektu SBS, w przeciwieństwie do SRS w którym dopiero moce powyżej 200 mW wywołują wzmocnienie Ramana. Po drugie, w przeciwieństwie do rozpraszania Ramana, które rozchodzi się w obu kierunkach światłowodu, rozpraszanie Brillouina w światłowodach jednomodowych rozchodzi się tylko wstecz. Proces wstecznego rozpraszania Brillouina degraduje transmitowany sygnał.

Zjawisko SBS jest bardzo wrażliwe na modulację światła. Im większa szybkość modulacji, tym szersze widmo źródła $\Delta\nu_L$, a więc mniejsze wzmocnienie g (i większa wartość progowa), co wynika ze wzoru (4.41) i co pozwala na znaczną redukcję SBS.



Rys.4.15 Ilustracja wpływu modulacji na wartość progową SBS, a) sygnał optyczny bez modulacji, b) sygnał optyczny z modulacją,

Rysunek 4.15 ilustruje wpływ modulacji na wartość progową wymuszonego rozpraszania Brillouina SBS.

4.4.5. Mieszanie czterofalowe (ang. four wave mixing, FWM)

Mieszanie czterofalowe FWM jest procesem nieliniowym trzeciego rzędu, opisanym trzecim członem w wyrażeniu na polaryzację

$$P_i = \chi_{ij}^{(1)} E + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \quad (4.43)$$

Jak pokazaliśmy w rozdziale wymuszone rozpraszanie Ramana jest szczególnym przypadkiem oddziaływania czterech fotonów (ang. *four - wave interaction*)

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 \pm \omega_3, \quad (4.44)$$

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = 0$$

Szczególnym przypadkiem jest również III harmoniczna, która powstaje gdy

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \quad (4.45)$$

otrzymujemy wtedy

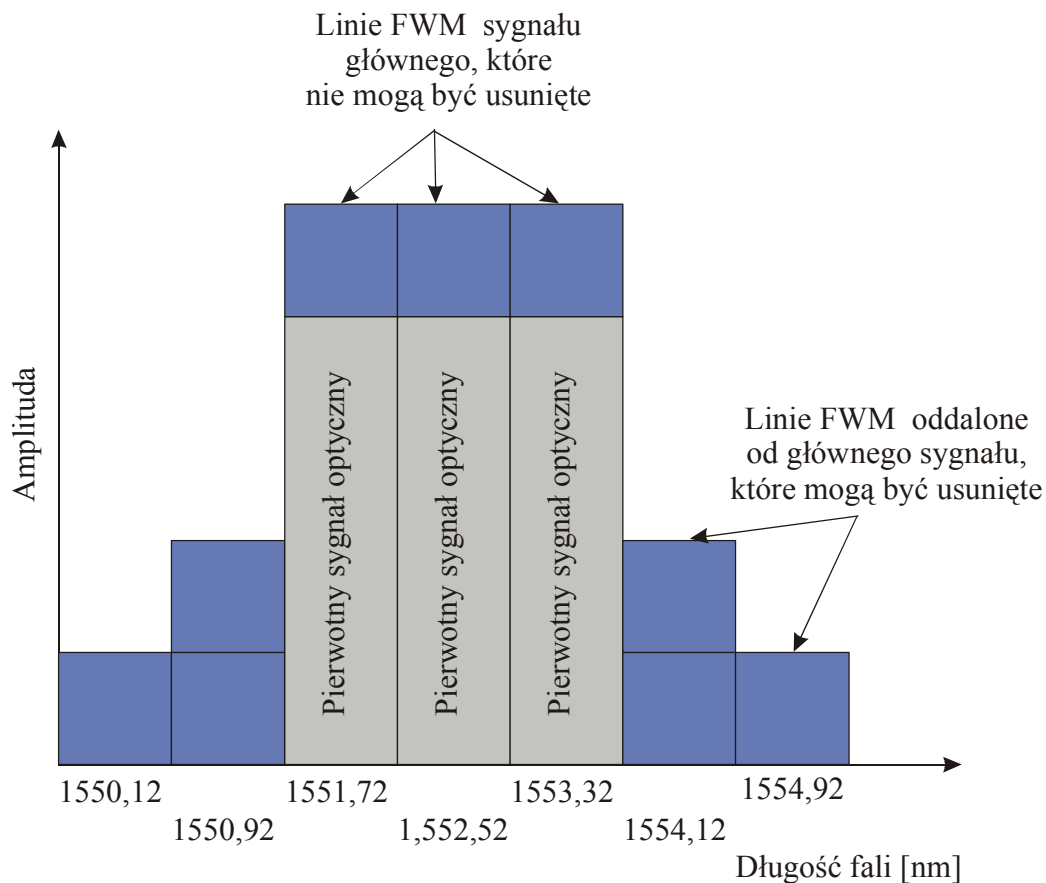
$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_1 + \omega_1 = 3\omega_1. \quad (4.46)$$

W systemach transmisji optycznej jednokanałowej powstanie III harmonicznej nie stanowi problemu, bowiem łatwo można tę nieliniową składową odfiltrować, gdyż leży w regionie spektralnym znacznie oddalonym od sygnału transmitowanego o częstości ω_1 . Jednak w systemach wielokanałowych, w których poszczególne kanały mają częstości nieznacznie różniące się, w wyniku mieszania czterofalowego powstają różne kombinacje, a niektóre z nich pokrywają się dokładnie z wiązką sygnałową i nie można jej w żaden sposób odfiltrować. Oczywiście mieszanie czterofalowe jest zjawiskiem niekorzystnym w transmisji, zniekształca bowiem sygnał transmitowany i prowadzi do zwiększenia elementowej stopy błędu. Jedynym sposobem usunięcia zaburzeń jest eliminacja zjawiska czterofalowego..

Rozważmy trzy kanały o długościach fal ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). Niech $\lambda_1 = 1551.72$ nm, $\lambda_2 = 1552.52$ nm, i $\lambda_3 = 1553.32$ nm. W wyniku mieszania czterofalowego mogą powstać fale o następujących długościach

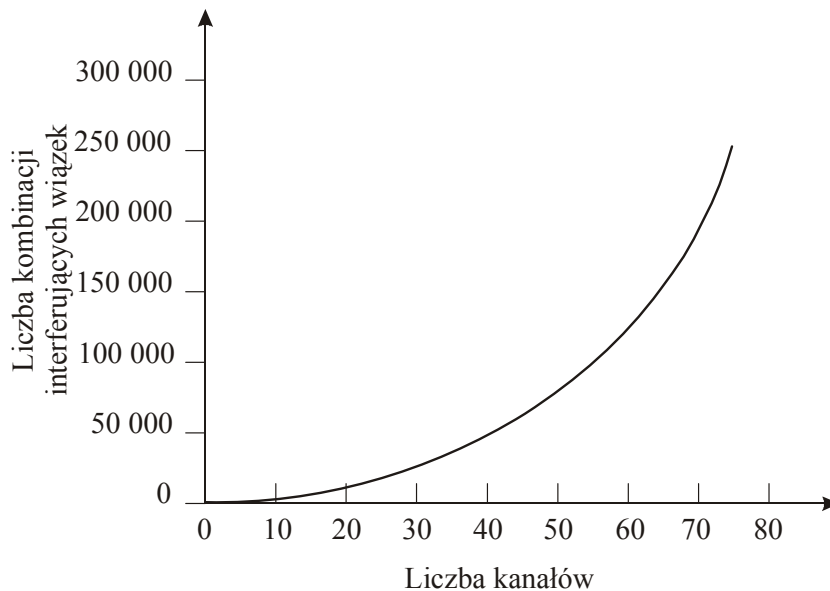
$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 1550.92 \text{ nm} & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 1552.52 \text{ nm} & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 &= 1554.12 \text{ nm} \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 1552.52 \text{ nm} & 2\lambda_1 - \lambda_3 &= 1550.12 \text{ nm} & 2\lambda_2 - \lambda_1 &= 1553.32 \text{ nm} \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 &= 1554.12 \text{ nm} & 2\lambda_3 - \lambda_1 &= 1554.92 \text{ nm} & 2\lambda_3 - \lambda_2 &= 1554.12 \text{ nm} \end{aligned}$$

Jak widać, trzy z nich są identyczne z wiązkami sygnałowymi (Rys.4.17), sześć pozostałych są na tyle różne, że można je odfiltrować.



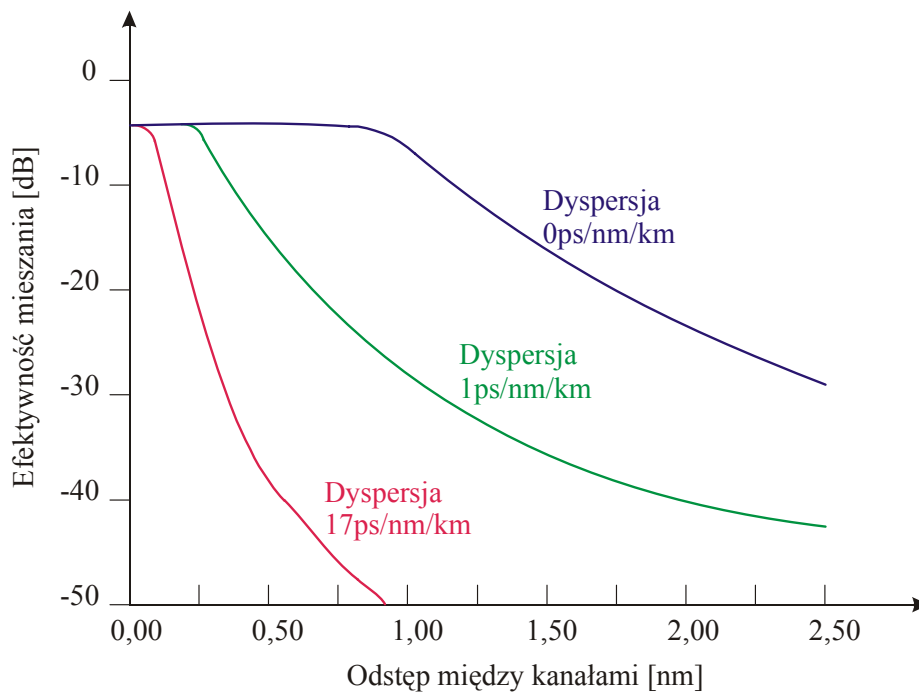
Rys.4.17 Ilustracja zjawiska mieszania czterofalowego

Liczba kombinacji interferujących wiązek rośnie wraz z liczbą kanałów jako $\frac{1}{2} \cdot (N^3 - N^2)$ i przedstawiona jest na rysunku 4.18.



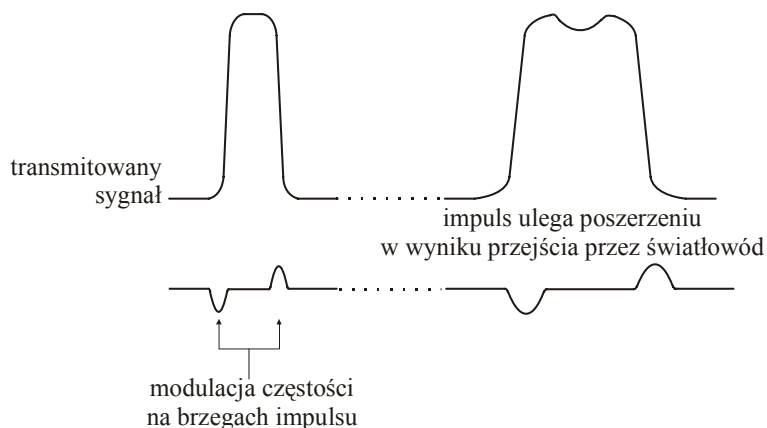
Rys.4.18 Zależność liczby kombinacji interferujących wiązek w wyniku mieszania czterofalowego od liczby liczbą kanałów

Efektywność mieszania czterofalowego zależy od odstępów między kanałami oraz od dyspersji omawianej w rozdziale 3 i charakteryzowanej przez współczynnik dyspersji D (3.47). Im mniejsza dyspersja, tym większa wydajność procesu mieszania czterofalowego. Tak więc w standardowych światłowodach pracujących w II oknie przy 1310 nm, w którym $D=0$, mieszanie jest bardzo wydajne, zaś w III oknie dla 1550 nm, w którym $D=17\text{ps/nm}\cdot\text{km}$ mieszanie czterofalowe dramatycznie maleje. Dla nowej generacji światłowodów z przesuniętą niewielką, ale niezerową dyspersją rzędu $1\text{ps/nm}\cdot\text{km}$, mieszanie jest znacznie mniejsze niż dla zerowej dyspersji. Zjawisko to ilustruje rysunek 4.19.



Rys.4.19 Zależność efektywności mieszania czterofalowego od odstępów między kanałami światłowodów charakteryzowanych przez różną dyspersję

4.6. Automodulacja fazy (SPM)



Rys.4.20 Ilustracja modulacji częstości na brzegach impulsu spowodowanej automodulacją SPM.

W rozdziale 3 omówiliśmy wydłużenie czasowe sygnału optycznego spowodowane dyspersją prędkości grupowej GVD. Poszerzenie czasowe sygnału jest zjawiskiem niekorzystnym w transmisji optycznej zarówno jednokanałowej jak i wielokanałowej, bowiem ograniczają przepływność i powodują przesłuchy. Oprócz dyspersji GVD jest jeszcze jeden powszechnie występujący w ośrodkach nieliniowych efekt zwany automodulacją SPM (ang. self-phase modulation). Szkło światłowodu staje się również ośrodkiem nieliniowym, gdy wzrastają moce optyczne transmitowane w światłowodzie. Niżej omówimy mechanizm automodulacji fazy, bowiem odgrywa on coraz większą rolę w sieciach optycznych o dużych przepływnościach na duże odległości.

Automodulacja SPM wynika z faktu, że nieliniowy współczynnik załamania $n(\omega)$ zależy od intensywności światła $I(t)$

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega)I(t). \quad (4.47)$$

Ponieważ intensywność impulsu optycznego zależy od czasu, np dla impulsu opisanego funkcją Gaussa wyraża się wzorem

$$I(t) = e^{-t^2} \quad (4.48)$$

Gdy impuls propaguje przez nieliniowy ośrodek (np. szkło światłowodu) współczynnik załamania wzrasta zgodnie ze wzorem (4.47). Maksimum impulsu czasowego doświadcza

największego wzrostu, brzegi-odpowiednio mniejszego. Nieliniowy współczynnik załamania $n_2(\omega)I(t)$ powoduje czasową zależność fazy ϕ_{NL} , bowiem

$$\phi_{NL} = \beta L = \frac{n(\omega)\omega}{C} L = \frac{n_0(\omega) + n_2(\omega)I(t)}{C} \omega L$$

wynika stąd że

$$\phi_{NL} = \frac{n_2(\omega)I(t)}{C} \omega L \quad (4.49)$$

Czasowa zależność nieliniowej fazy ϕ_{NL} powoduje, że chwilowa częstość wzdłuż impulsu czasowego zmienia się i różni się od częstości centralnej ω_0 impulsu. Chwilowe zmiany częstości wzdłuż impulsu przedstawiono na rysunku 4.20. Gdy impuls czasowy wędruje przez światłowód, jego brzeg ze wzrastającą intensywnością (ang. leading edge) doświadcza przesunięcia częstości w stronę fal dłuższych(ang. red shift). Z kolei odpadający brzeg impulsu czasowego (ang. falling edge, albo trailing edge) doświadcza wzrostu częstości (ang. blue shift). Aby zrozumieć dlaczego narastający brzeg impulsu wykazuje przesunięcia do częstości niższych, zaś brzeg opadający do częstości wyższych należy zauważyć, że zmiana częstości $\delta\omega(T)$ w stosunku do centralnej częstości ω_0 wynosi

$$\delta\omega(T) = - \frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} \quad (4.50)$$

Znak minus wynika z wyboru znaku dla paczki falowej o centralnej częstości $\exp(-i\omega_0 t)$, zaś T oznacza czas w układzie odniesienia poruszającym się z prędkością grupową v_g centrum paczki falowej

$$T = t - \frac{2}{v_g} \quad (4.51)$$

Ze wzoru (4.50) wynika, że dla brzegu narastającego impulsu $\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} > 0$ (bo współczynnik załamania $n_2(\omega)I(t)$ rośnie) i $\delta\omega(T) < 0$ (red shift). Z kolei dla brzegu opadającego $\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial t} < 0$ i $\delta\omega(T) > 0$ (blue shift).

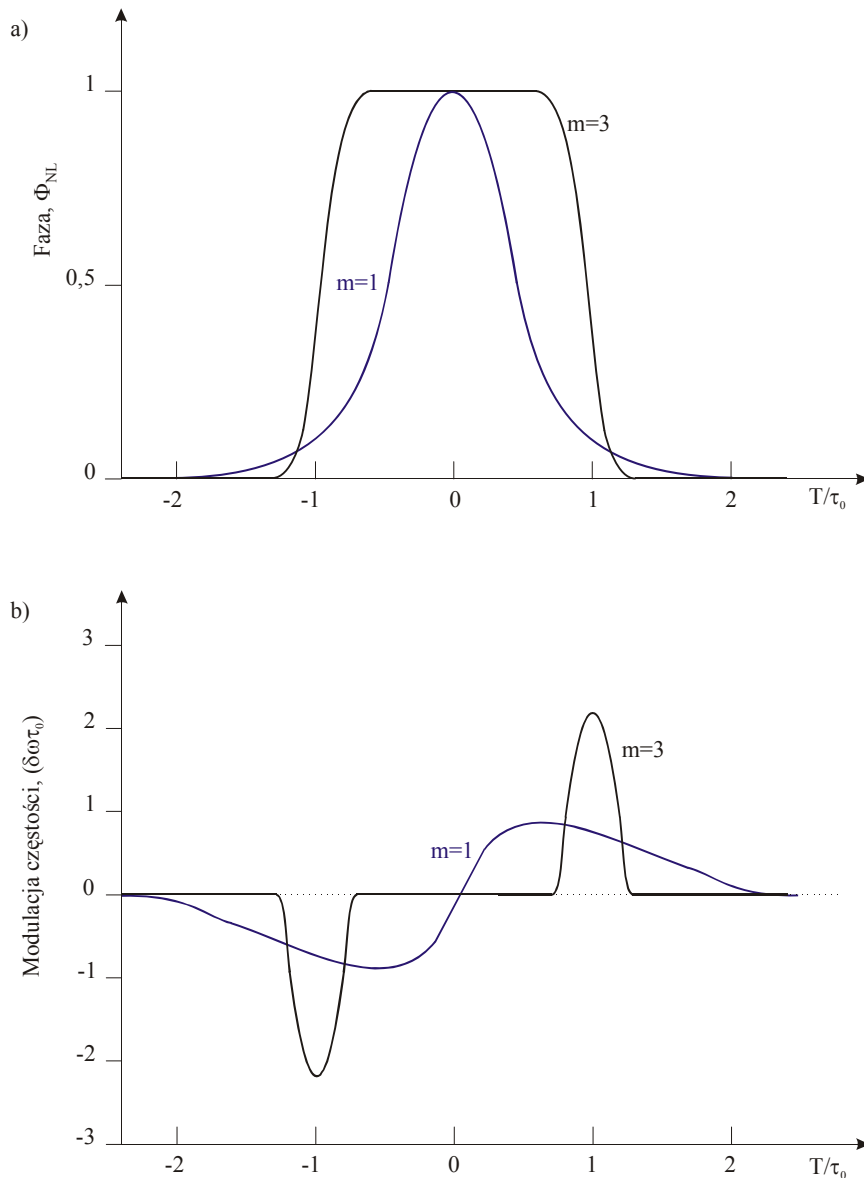
Jak widać ze wzoru (4.50) automodulacja SPM wprowadza do impulsu nowe częstości. Obok częstości centralnej ω_0 , pojawiają się częstości z zakresu $\pm \delta\omega(T)$, co powoduje poszerzenie spektralne impulsu. Zależność przesunięcia częstości $\delta\omega$ od czasu nosi nazwę modulacji częstości (ang. frequency chirping). Gdy impuls propaguje przez światłowód wzrasta ϕ_{NL} (bo

rośnie odległość jak wynika ze wzoru 4.49), a stąd również $\delta\omega$. Oznacza to, że wraz z odległością generowane są nowe częstotliwości w propagującym impulsie, czyli impuls ulega ciągłemu poszerzeniu spektralnemu. Zjawisko poszerzenia spektralnego impulsu spowodowane nieliniowością współczynnika załamania (poprzez człon $n_2(\omega)I(t)$) nosi nazwę automodulacji SPM. Poszerzenie spektralne impulsu spowodowane efektem SPM powoduje również wydłużenie czasowe impulsu. Początkowo może wydawać się to dziwne, bowiem z transformacji Fouriera wiążącej domenę czasową i domeną częstotliwości wynika, że im szerszy spektralnie impuls, tym krótszy jest czas jego trwania. Aby zrozumieć tę pozorną rozbieżność należy podkreślić, że nowe częstotliwości wygenerowane przez zjawisko SPM nie są zsynchronizowane. Oznacza to, że nowe składowe wnoszą wkład do obwiedni czasowej impulsu poprzez poszerzenie niehomogeniczne, nie poprzez transformację Fouriera i generują impulsy, które nie podlegają relacji Fouriera (ang. non transform-limited pulses).

Należy pamiętać, że na efekt automodulacji SPM wynikającej z nieliniowości współczynnika załamania nakłada się efekt dyspersji prędkości grupowej GVD opisany w rozdziale 3. W ośrodku, który wykazuje dodatni „normalny” efekt GVD ($GVD > 0$) spektralne składowe impulsu czasowego o dłuższych falach poruszają się szybciej niż składowe krótsze. Każda z tych dłuższych składowych podlega dodatkowej dyspersji wynikającej z automodulacji SPM. Podobny efekt zachodzi na opadającym zboczach, generując dodatkowe składowe przesunięte w kierunku niebieskim.

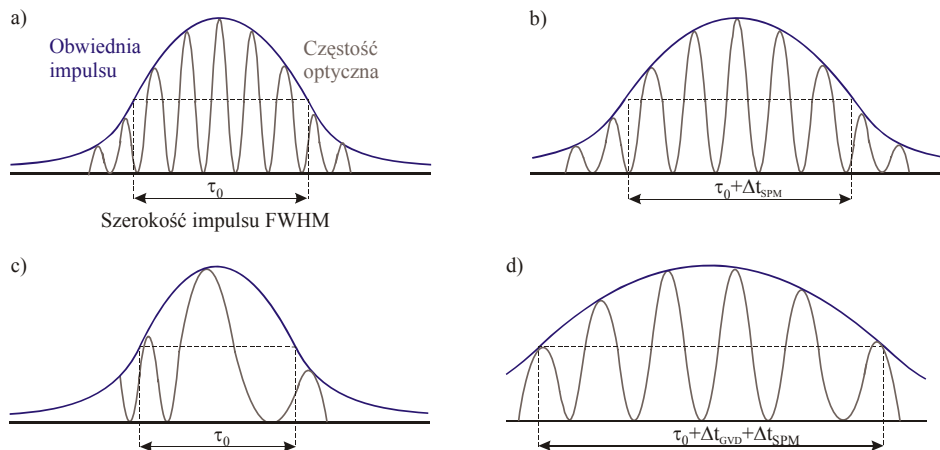
Podsumowując, automodulacja SPM w szczególności w połączeniu z dodatnim efektem GVD prowadzi do wydłużenia impulsu czasowego

Rysunek 4.21 ilustruje czasową zmianę fazy ϕ_{NL} spowodowaną automodulacją (4.49.a) oraz częstotliwości (ang. frequency chirp) (4.50) dla impulsu czasowego o kształcie Gaussa ($m=1$) i super Gaussa ($m=3$)



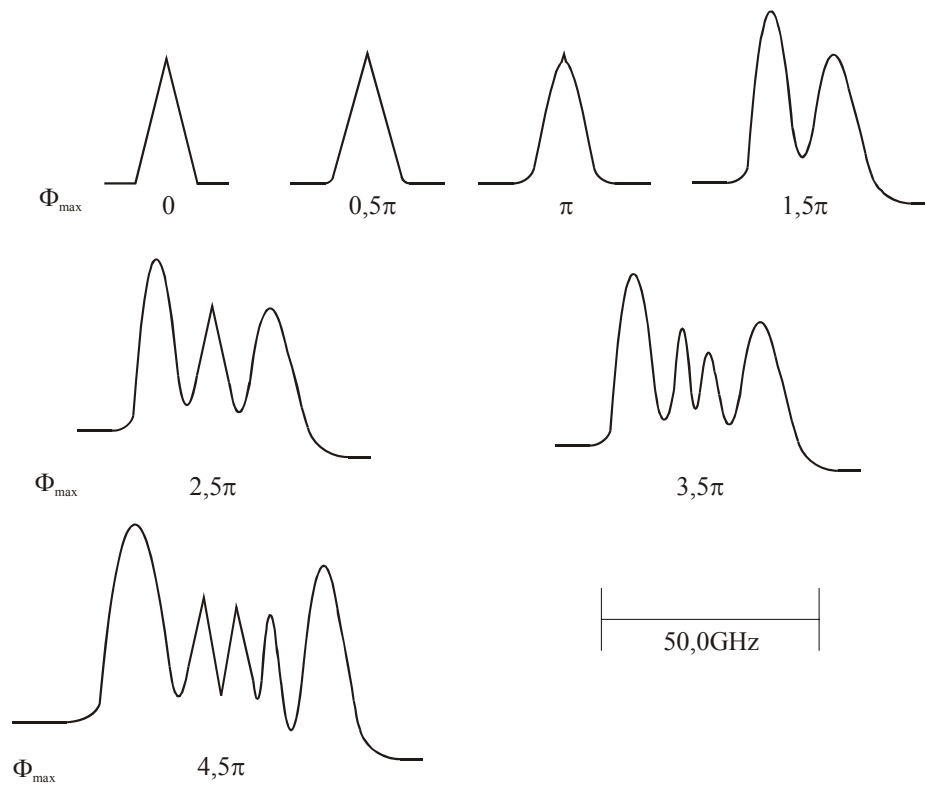
Rys.4.21 Czasowa zmiana fazy Φ_{NL} spowodowana automodulacją (a) oraz modulacja częstości (ang. frequency chirp) dla impulsu czasowego o kształcie Gaussa ($m=1$) i super-Gaussa ($m=3$) [15], gdzie $\delta\omega = \frac{\partial\phi_{NL}}{\partial\tau}$, τ_0 jest czasem trwania impulsu niezaburzonego efektem SPM. Konsekwencją zjawiska przedstawionego na Rys.4.21 jest poszerzenie czasowe impulsu. Rys.4.22 ilustruje wpływ automodulacji SPM na poszerzenie czasowego impulsu. Przedstawiono następujące przypadki, (a) kształt impulsu wejściowego bez chirpu o czasie trwania t_0 , (b) ten sam impuls po przebyciu drogi L w światłowodzie niedispersyjnym ($GVD=0$) i nieliniowym ($SPM \neq 0$), (c) kształt impulsu wejściowego z chirpem ($GVD < 0$), (d)

ten sam impuls z chirpem wejściowym ($GVD < 0$) po przebyciu drogi L w światłowodzie dyspersyjnym i nieliniowym ($SPM \neq 0$).



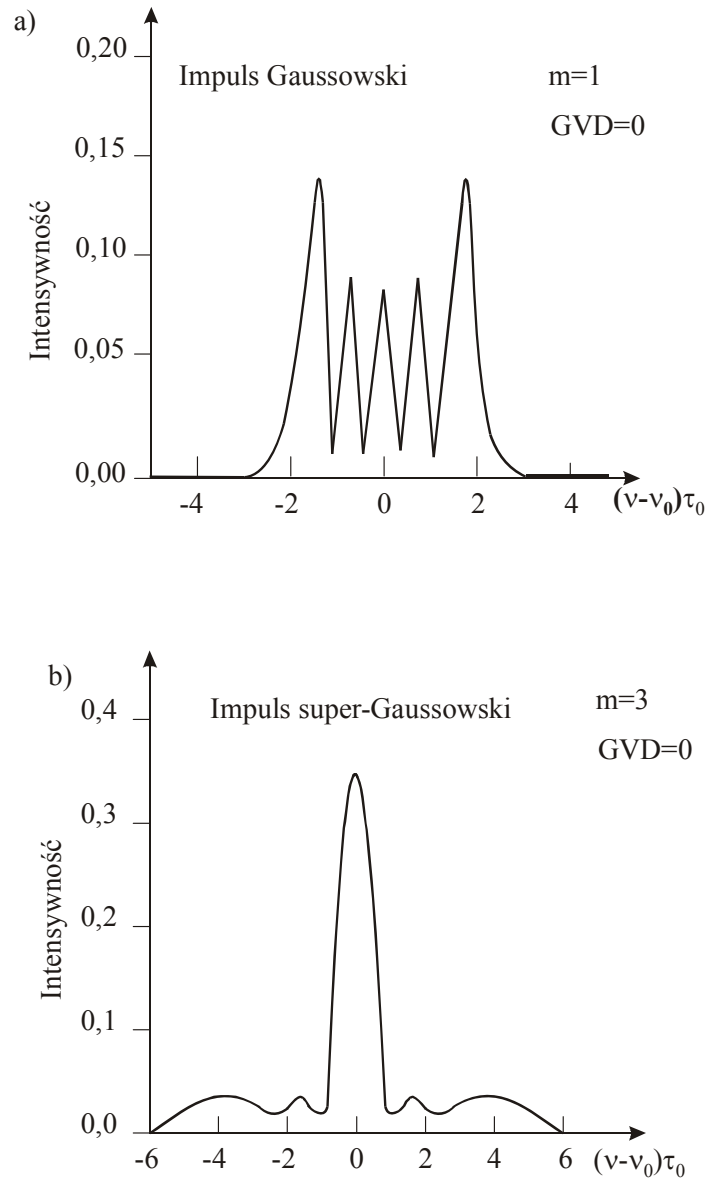
Rys.4.22 Wpływ automodulacji na poszerzenie czasowego impulsu (a) kształt impulsu wejściowego bez chirpu, (b) ten sam impuls po przebyciu drogi L w światłowodzie, (c) kształt impulsu wejściowego z chirpem, (d) ten sam impuls z chirpem wejściowym po przebyciu drogi L w światłowodzie

Gdy moc impulsu rośnie, impuls czasowy nie tylko ulega poszerzeniu, ale również wykazuje strukturę oscylacyjną z najbardziej intensywnymi pikami na brzegach impulsu (Rys.4.23). Ten oscylacyjny charakter można zrozumieć patrząc na rysunek 4.21, gdzie przedstawiono zmiany częstości w czasie trwania impulsu. Niżej, przedstawiamy za pracą [16] zmiany kształtu impulsów czasowych modyfikowanych efektem SPM dla różnych kształtów impulsu wejściowego i mocy impulsu.



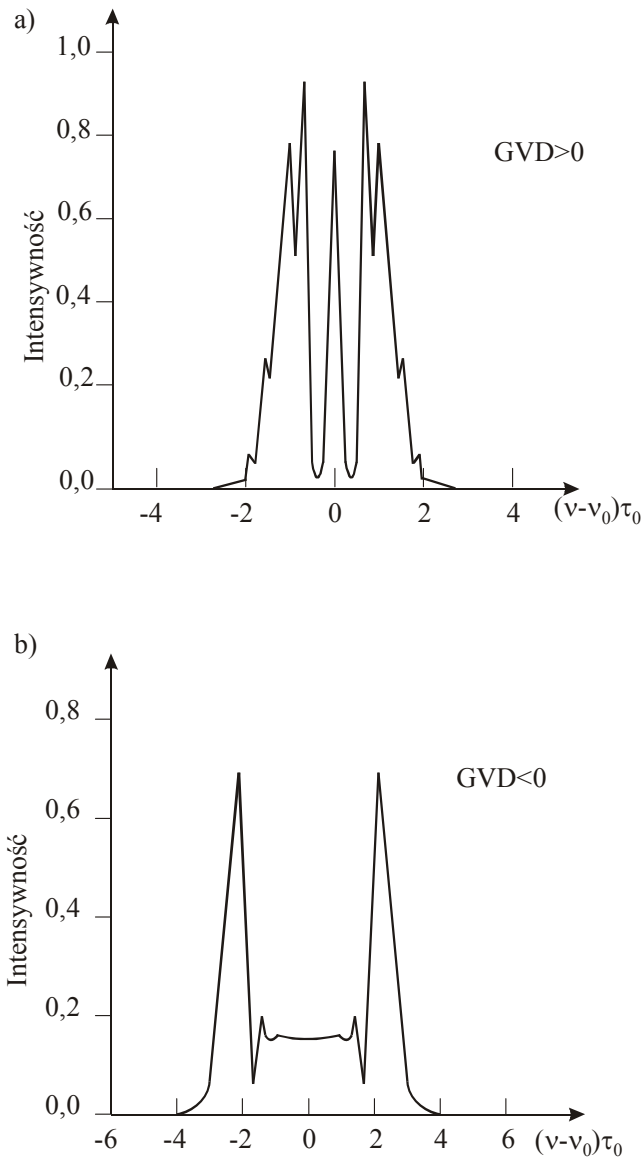
Rys.4.23 Kształt impulsów czasowych obserwowanych eksperymentalnie dla prawie gaussowskiego impulsu wejściowego po przebyciu drogi 99 m w światłowodzie (promień rdzenia $a=3.35 \mu m$, częstotliwość znormalizowana $\nu=2.53$). Różne kształty odpowiadają różnym wartościom maksimum przesunięcia fazowego Φ_{max} proporcjonalnego do mocy impulsu, czas trwania impulsu wejściowego $\tau_0 \approx 90 ps$ [16]

Maksimum przesunięcia fazowego ϕ_{max} odpowiada wartości przesunięcia fazowego ϕ_{NL} dla $T=0$ (w centrum impulsu czasowego).



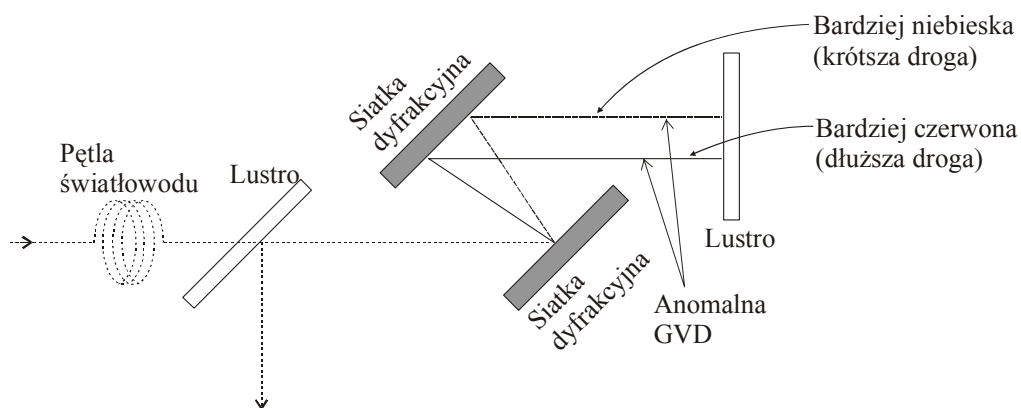
Rys.4.24 Porównanie wpływu SPM na kształt czasowy impulsu dla wejściowego impulsu o kształcie Gaussa (a) i super-Gaussa (b) dla mocy P_0 odpowiadającej maksimum przesunięcia fazy $\Phi_{max} = 4.5\pi$ [17]

Rysunek 4.24 przedstawia porównanie wpływu automodulacji SPM na kształt czasowy impulsu w zależności od kształtu impulsu wejściowego, profil Gaussa (a) i profil super-Gaussa (b) dla mocy P_0 odpowiadającej przesunięciu fazy $\phi_{max} = 4.5\pi$



Rys.4.25 Porównanie wpływu SPM na kształt czasowy impulsu dla wejściowego impulsu o dodatkowej GVD (a) i ujemnej GVD (b) dla mocy P_0 odpowiadającej maksymalnemu przesunięciu fazy $\Phi_{max} = 4.5\pi$ [17]

Gdy impuls wejściowy wykazuje wstępny chirp, wtedy kształt impulsu wykazuje jeszcze bardziej niż poprzednio oscylacyjny charakter dla dodatniej dyspersji GVD (Rys.4.25) Przeciwnie, gdy wejściowy impuls wykazuje ujemną dyspersję zanika oscylacyjny charakter w środku impulsu i pozostają tylko dwa najbardziej zewnętrzne piki.



Rys.4.26 Typowa konfiguracja kompresji impulsów z zastosowaniem siatek

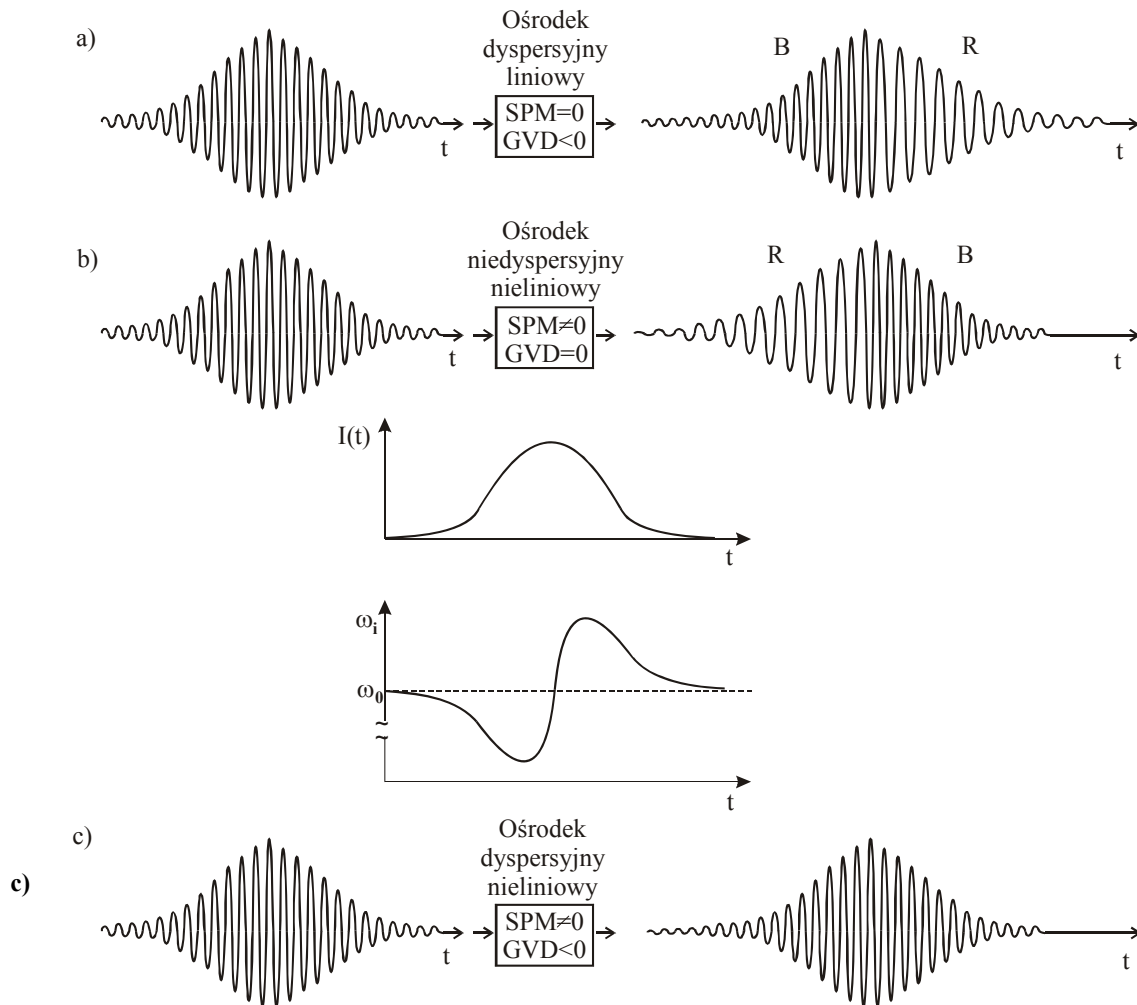
Do tej pory omówiliśmy negatywne aspekty automodulacji SPM, która wpływa na poszerzenie i zniekształcenie impulsu. Jednak automodulacja SPM może odgrywać bardzo pozytywną rolę w kompresji impulsów. Zjawisko automodulacji SPM w połączeniu z dyspersją prędkości grupowej GVD wykorzystywane jest do kompresji impulsów za pomocą dwóch metod:

- metoda siatek dyfrakcyjnych
- metoda kompresji solitonowej

Pierwsza metoda jest wykorzystywana w zakresie widzialnym i bliskiej podczerwieni. Druga metoda jest wykorzystywana w obszarze maksimum absorpcji materiału światłowodowego. Metodę siatek dyfrakcyjnych przedstawiono na rysunku 4.26. Przypomnijmy, że dla dużej części zakresu spektralnego materiały wykazują „normalną” dyspersję, czyli współczynnik załamania rośnie gdy długość fali maleje (Rys.3.11). W tym zakresie impuls wykazuje dodatnią dyspersję prędkości grupowej ($GVD > 0$). Jednak w pobliżu rezonansu (maksimum absorpcji) zależność współczynnika załamania od długości fali wykazuje przeciwną tendencję a impuls wykazuje ujemną dyspersję prędkości grupowej ($GVD < 0$). W centrum absorpcji nie ma efektu dyspersji prędkości grupowej ($GVD = 0$). Metoda siatek dyfrakcyjnych wykorzystywana jest w obszarze długości fal dla których impuls wykazuje dodatni efekt GVD. Podczas propagacji światła w światłowodzie polega on zaburzeniu zarówno przez efekt automodulacji SPM i efekt dyspersji prędkości grupowej GVD. Tak więc impuls po przejściu przez światłowód wykazuje znaczny dodatni „chrip”, który jest prawie liniowy. Następnie, impuls ten przechodzi przez zewnętrzną parę siatek dyfrakcyjnych, które są skonfigurowane w taki sposób że generują ujemny efekt GVD ($GVD < 0$). Ujemny efekt GVD osiąga się poprzez wydłużenie drogi optycznej dla wiązki czerwonej w porównaniu z wiązką niebieską.

Ponieważ dla $GVD > 0$ wiązka czerwona wędruje szybciej niż niebieska, następuje w ten sposób eliminacja efektu GVD.

W metodzie kompresji solitonowej wykorzystuje się promieniowanie z obszaru rezonansu materiału z którego wykonany jest światłowód. Dla szklanego światłowodu maksimum absorpcji występuje dla $1.31 \mu m$, co oznacza, że dla $1.31 \mu m$ GVD wynosi zero. Tak więc, dla promieniowania w pobliżu rezonansu, światłowód wykazuje „anomalną” dyspersję a impuls propagując przez światłowód wykazuje ujemną wartość GVD. Kompresor solitonowy jest po prostu kawałkiem światłowodu o właściwie dobranej długości, tak aby ujemny efekt GVD w tym odcinku zrównoważył dodatni chirp wygenerowany na wcześniejszych etapach propagacji poprzez dodatni efekt GVD i efekt SPM. W wyniku kompensacji impuls wykazuje zerowy chirp i nosi nazwę **solitonu**. Taki impuls zachowuje kształt, moc i czas trwania na wyjątkowo długich odcinkach światłowodu i może być transmitowany w sieciach optycznych na ogromne odległości.



Rys.4.27 Ilustracja zjawiska anomalnej dyspersji ($GVD<0$) (a), automodulacji (b), kompensacji solitonowej (c). Objasnienia w tekście.

Rysunek 4.27 podsumowuje naszą dotychczasową dyskusję zjawiska automodulacji SPM, dyspersji prędkości grupowej GVD oraz kompensacji solitonowej.

- a) gdy na dyspersyjny ośrodek liniowy ($GVD<0$; $n_2=0$) pada impuls nie wykazujący chirpu wejściowego, to po przejściu jest modyfikowany i wykazuje modulację częstotliwości, z falami krótszymi (składowe B) poruszającymi się szybciej niż fale dłuższe (składowe R)
- b) gdy na niedyspersyjny ośrodek nieliniowy ($GVD=0$; $n_2>0$) pada impuls nie wykazujący chirpu wejściowego, to po przejściu impuls jest modyfikowany i wykazuje przesunięcie częstotliwości do fal krótszych (składowe R) dla narastającego zbocza impulsu oraz przesunięcie częstotliwości do fal dłuższych (składowe B) dla

opadającego zbocza impulsu (składowe R). Impuls wyjściowy wykazuje modulację częstości, ale kształt impulsu zostaje zachowany. Jeżeli jako impuls wejściowy dla przypadku a) zastosujemy impuls wyjściowy z przypadku b) impuls zostanie skrócony.

- c) gdy na dyspersyjny ośrodek nieliniowy ($GVD < 0$; $n_2 > 0$) pada impuls nie wykazujący chirpu wejściowego, to po przejściu impuls jest modyfikowany i jego kształt może zostać zachowany (jest to przypadek solitonów), impuls może ulec skróceniu lub wydłużeniu.

4.7. Skośna modulacja fazy (XPM)

Skośna modulacja (ang. cross phase modulation, XPM) opisuje mechanizm bardzo zbliżony do automodulacji fazy SPM. Zasadnicza różnica polega na tym, że aby zaszło zjawisko XPM dwa różne impulsy a nie jeden jak, to ma miejsce dla SPM muszą wędrować przez ośrodek (światłowód), każdy z nich zmieniający współczynnik załamania ośrodka, gdy moc optyczna jest na tyle duża, aby człon $n_L(\omega)I(t)$ był istotny. Gdy impulsy czasowe nakładają się, wprowadzają zaburzenie do drugiego impulsu poprzez efekt XPM. W przeciwieństwie do efektu SPM, dyspersja wywiera niewielki wpływ na efekt XPM. Zwiększając powierzchnię efektywną światłowodu, zmniejszamy efekt XPM oraz wszystkie inne zjawiska nieliniowe w światłowodzie.

4.8. Teoretyczny opis zjawiska GVD i automodulacji SPM [6,14,15]

4.8.1. Nieliniowe równanie Schrodingera [6]

Polaryzacja kontroluje ona oddziaływanie promieniowanie-materia, dlatego odgrywa również kluczową rolę w opisie zjawisk zachodzących w światłowodach.

Operator polaryzacji dla układu N cząsteczek opisuje się wzorem

$$\hat{P}(\mathbf{r}) = \sum_m P_m(\mathbf{r}) \quad (4.52)$$

gdzie $P_m(\mathbf{r})$ jest polaryzacja cząsteczki m

$$P_m(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \int_0^1 du q_{m\alpha} (\hat{r}_{m\alpha} - R_m) \delta[\mathbf{r} - R_m - u(\hat{r}_{m\alpha} - R_m)] \quad (4.53)$$

gdzie $\hat{r}_{m\alpha}$ jest operatorem położenia, $q_{m\alpha}$ jest ładunkiem elektrycznym cząstki α (elektron lub jądro) należącej do cząsteczki m , R_m jest środkiem masy (lub ładunku), całkowanie po u zapewnia właściwe współczynniki w rozwinięciu multipolowym operatora polaryzacji.

Najczęściej wystarczy przybliżenie dipolowe, które zawiera pierwszy człon rozwinięcia multipolowego. Równanie (4.53) upraszcza się do postaci

$$\hat{P}(\mathbf{r}) = \sum_m \mu_m \delta(\mathbf{r} - R_m) \quad (4.54)$$

gdzie μ_m jest operatorem momentu dipolowego dla m -tej cząsteczki i wyraża się wzorem

$$\mu_m = \sum_{\alpha} q_{m\alpha} (\hat{r}_{m\alpha} - R_m). \quad (4.55)$$

$\delta(\mathbf{r} - R_m)$ jest funkcją zwaną deltą Diraca

$$\delta(\mathbf{r} - R_m) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = R_m \\ 0 & \mathbf{r} \neq R_m \end{cases} \quad (4.56)$$

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - R_m) d\mathbf{r} = f(R_m)$$

Pole elektryczne lasera $E(\mathbf{r}, t)$ oddziałuje (4.56) z ośrodkiem poprzez polaryzację $P(\mathbf{r})$. Oddziaływanie jest opisane za pomocą pól klasycznego Hamiltonianu.

$$H_{int}(t) = -\int E(\mathbf{r}, t) P(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.57)$$

Hamiltonian (4.57) przyjmuje prostą postać, gdy zrobimy przybliżenie dipolowe. Przybliżenie dipolowe oznacza, że pojedyncza cząstka (elektron, jądro) ma rozmiary mniejsze niż długość fali elektromagnetycznej. Można wtedy przedstawić rozkład pola cząstki jako punktu. W przybliżeniu dipolowym wyrażenie (4.57) można przedstawić jako

$$H_{int}(t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}, \quad (4.58)$$

z operatorem dipolowym

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (4.59)$$

gdzie sumowanie zawiera wszystkie elektrony i jądra α o ładunkach q_{α} w położeniach \mathbf{r}_{α} .

W przybliżeniu pół klasycznego opisu cząsteczki układu są opisane kwantowo-mechanicznie, zaś pole elektryczne $E(\mathbf{r},t)$ jest opisane klasycznie. W obrazie Schrodingera, pół klasyczny opis prowadzi do równań Maxwella-Liouville'a

$$\nabla \times \nabla \times E(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{r}, t) \quad (4.60)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = Tr [\hat{P}(\mathbf{r}) \rho(t)] \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_T, \rho(t)] \quad (4.62)$$

W dalszej części rozważań dotyczących transmisji światłowodowej zajmować się będziemy głównie równaniem (4.60) opisującym propagację światła. Równania 4.60-4.62 opisują zaś polaryzację ośrodka pod wpływem pola elektrycznego E . Jak łatwo zauważyć układ równań jest układem równań sprzężonych-pole elektryczne powoduje polaryzację ośrodka, która z kolei modyfikuje natężenie pola $E(\mathbf{r}, t)$.

Dla porządku omówimy jednak krótko (na podstawie [6,19]) polaryzację $P(\mathbf{r}, t)$ ośrodka, która jest podstawową wielkością wykorzystywaną w spektroskopii optycznej. Aby obliczyć $P(\mathbf{r},t)$, należy uśrednić po zespole statystycznym (4.61) wykorzystując nieliniowy operator gęstości (symbol Tr (ang. trace) oznacza operację sumowania po diagonalnych elementach operatora gęstości). Z kolei nieliniowy operator gęstości otrzymuje się z rozwiązania równania Liouville'a (4.62) gdzie Hamiltonian H_T wyraża się wzorem

$$H_T = H + H_{int} \quad (4.63)$$

i składa się z Hamiltonianu H układu cząsteczek ośrodka i Hamiltonianu oddziaływania materia-promieniowanie H_{int} (wyrażone równaniem 4.57). Niestety, rozwiązanie równania (4.62) nie jest proste. Jedynie w stanie termicznej równowagi $t = t_0$, gdy pole elektryczne lasera nie zaburza układu ($H_{int} = 0$) operator gęstości przyjmuje dobrze znaną postać operatora gęstości w zespole kanonicznym

$$\rho(t_0) = \rho(-\infty) = \frac{\exp(-\beta H)}{Tr \exp(-\beta H)} \quad (4.64)$$

gdzie $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B jest stałą Boltzmana, T jest temperaturą

W stanie nierównowagi, gdy wiązka lasera zaczyna oddziaływać z cząsteczkami ośrodka rozwiązanie równania (4.62) nie jest proste. Zazwyczaj stosowana jest metoda rachunku zaburzeń, co oznacza, że zależny od czasu operator gęstości $\rho(t)$ rozwijamy w szereg

$$\rho(t) = \rho^{(0)}(t) + \rho^{(1)}(t) + \rho^{(2)}(t) + \rho^{(3)}(t) + \dots \quad (4.65)$$

gdzie $\rho^{(n)}$ oznacza wkład pola elektrycznego n-tego rzędu, $\rho^{(0)}(t) = \rho(-\infty)$.

Po podstawieniu (4.65) do (4.62) otrzymujemy rozwinięcie polaryzacji w szereg Taylora

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + P^{(2)}(\mathbf{r}, t) + P^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (4.66)$$

Pierwszy wyraz $P^{(1)}$ opisuje zakres optyki liniowej, $P^{(2)}$ jest odpowiedzialna za procesy generowania II harmonicznej, $P^{(3)}$ odpowiedzialna jest za procesy generowania III harmonicznej wymuszonego rozpraszania Ramana I wielu innych procesów mierzonych za pomocą różnych technik laserowych, takich jak mieszanie czterofalowe, spektroskopia typu wiązka pompująca-wiązka sondująca (ang. Pump-probe spectroscopy).

Można pokazać [19], że polaryzacja n-tego rzędu $P^{(n)}(\mathbf{r}, t)$ wyrazić można za pomocą liniowej funkcji odpowiedzi $S^{(n)}$, która dostarcza kompletnej informacji o czasowej ewolucji ośrodka pod wpływem pola elektrycznego

$$P^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dt_n \int_0^\infty dt_{n-1} \dots \int_0^\infty dt_1 S^{(n)}(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) E(\mathbf{r}, t - t_n) E(\mathbf{r}, t - t_n - t_{n-1}) \dots E(\mathbf{r}, t - t_n - t_{n-1} - \dots - t_1) \quad (4.67)$$

gdzie funkcje odpowiedzi są dane wzorem

$$S^{(n)}(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \theta(t_1) \theta(t_2) \dots \theta(t_n) \times \langle V(t_n + \dots + t_1) [V(t_{n-1} + \dots + t_1), [\dots [V(t_1), [V(0), \rho(-\infty)]]] \dots]] \rangle \quad (4.68)$$

$\theta(\tau)$ jest skokową funkcją [$\theta(\tau) = 1$ dla $\tau > 0$ i $\theta(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$], $\rho(-\infty) = \rho_0$ reprezentuje równowagowy operator gęstości, który nie ewoluuje w czasie. Operator $V(t)$ z równania (4.68) można wyrazić jako

$$V(\tau) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H \tau\right) V \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \tau\right) \quad (4.69)$$

i reprezentuje operator momentu dipolowego w obrazie oddziaływania. Z równań (4.67-4.69) wynika że polaryzacja $P^{(n)}$ jest wyrażona za pomocą funkcji korelacyjnych n-tego rzędu.

Dla liniowej polaryzacji $P^{(1)}$, która kontroluje wszystkie procesy spektroskopii optycznej z zakresu liniowego (absorpcja, spontaniczne rozpraszanie Ramana) liniowa funkcja odpowiedzi $S^{(1)}$ przyjmuje postać

$$S^{(1)}(t_1) = \frac{i}{\hbar} \theta(t_1) \langle [V(t_1), V(0)] \rho(-\infty) \rangle \quad (4.70)$$

i reprezentuje dobrze znaną funkcję korelacyjną opisującą korelacje między dwoma punktami czasowymi $(t_1, 0)$. Funkcje korelacyjne typu (4.70) opisują dynamikę relaksacji wibracyjnej w spektroskopii IR i spektroskopii Ramana, oraz dynamikę relaksacji reorientacyjnej. Funkcje odpowiedzi wyższego rzędu są trochę bardziej skomplikowane, ale w wielu wypadkach można przedstawić je jako iloczyn funkcji korelacyjnych dla dwóch punktów. Szczegóły można znaleźć w książce [6,16].

Równanie (4.60) można przedstawić w postaci następującego równania falowego

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_L(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.71)$$

bowiem $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ oraz $\nabla \times \nabla \times E = -\nabla^2 E$,

gdzie $P_L(\mathbf{r}, t)$ i $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$ są liniową i nieliniową polaryzacją, odpowiednio, czyli $P_L(\mathbf{r}, t)$ jest pierwszym członem w wyrażeniu (4.4), zaś $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$ obejmuje wszystkie pozostałe człony. Załóżmy, że fala elektromagnetyczna jest quasi-monochromatyczna, czyli jej szerokość spektralna $\Delta\omega$ jest dużo mniejsza od częstotliwości centrum paczki falowej ω_0 ($\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$). Przybliżenie to jest dobrze spełnione dla impulsów o czasie trwania $\tau_0 > 0.1 ps$, ponieważ częstotliwość centrum jest rzędu $\omega_0 \approx 10^{15} s^{-1}$.

Wygodnie jest rozseparować część szybkozmienną ω_0 i stosunkowo wolnozmienną w czasie obwiednię impulsu (ang. slowly varying envelope approximation) i zapisać falę jako

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (4.72)$$

i podobnie

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (4.73)$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (4.74)$$

gdzie \hat{x} jest wektorem jednostkowym polaryzacji w kierunku x . Wyrażając polaryzacje za pomocą podatności elektrycznych odpowiedniego rzędu w domenie czasu $\chi_{xx}^{(1)}(t - t')$ oraz $\chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3)$ otrzymujemy

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (4.75)$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (4.76)$$

i wykorzystując (4.72) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_L(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[i\omega_0(t - t')] dt' \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega \end{aligned} \quad (4.77)$$

gdzie $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}$ oraz $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$ są transformacjami Fouriera podatności i pola elektrycznego i reprezentują domenę częstości. Podobnie wyrażamy $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$. W ogólności funkcje odpowiedzi $\chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3)$ są skomplikowaną funkcją czasu wyrażoną poprzez funkcje odpowiedzi $S^{(3)}$ (4.67-4.68). Nieliniowa odpowiedź układu upraszcza jednak znacznie, gdy założymy, że odpowiedź jest natychmiastowa. Jest to drastyczne uproszczenie, bowiem tylko polaryzacja elektronowa jest natychmiastowa, wibracyjne stopnie swobody związane z drganiami jąder cząsteczek są dużo wolniejsze i odpowiedź układu z nimi związana nie jest natychmiastowa po zastosowaniu impulsu pola elektrycznego. Przybliżenie tego zdecydowanie nie można używać do opisu wymuszonego rozpraszania Ramana, bowiem to wibracje decydują o przebiegu zjawiska Ramana. W pierwszym przybliżeniu jednak, gdy dyskutujemy wpływ impulsów dłuższych o czasie trwania $\tau_0 > 0.1ps$ i nie zajmujemy się efektem Ramana możemy wykorzystać to założenie. Wtedy funkcję odpowiedzi można zapisać jako

$$\chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi_{xxx}^{(3)} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3) \quad (4.78)$$

gdzie funkcja $\delta(t - t_1)$ jest deltą Diraca (4.56)

Równanie (4.75) przyjmuje wtedy postać

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4.79)$$

a po wykorzystaniu zapisu (4.74) otrzymujemy

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t) \quad (4.80)$$

gdzie ε_{NL} jest nieliniowym wkładem do stałej dielektrycznej

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (4.81)$$

Po podstawieniu (4.72-4.74) do (4.71) otrzymujemy równanie Helmholtza

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (4.82)$$

gdzie:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}; \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (4.83)$$

oraz

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt \quad (4.84)$$

W wyprowadzeniu równania Helmholtza dla przypadku nieliniowego potrzebne było jednak dodatkowe założenie, że $\varepsilon_{NL} = \text{const}$, co jest oczywiście nieprawdziwe ze względu na zależność od natężenia pola. W pierwszym przybliżeniu można jednak uznać, że ze względu na założenie wolno zmieniającej się obwiedni (ang. slowly varying envelope approximation) oraz perturbacyjny (a więc niewielki) charakter zaburzenia związanego z nieliniowością przybliżenie $\varepsilon_{NL} = \text{const}$ zastosowane w rozwiązywaniu równania (4.71) jest akceptowalne. Podobnie jak w zakresie liniowym, rzeczywista i urojona część stałej dielektrycznej zależy od współczynnika załamania \tilde{n} i współczynnika absorpcji $\tilde{\alpha}$ poprzez związek

$$\varepsilon = (\tilde{n} + i\tilde{\alpha} / 2k_0)^2 \quad (4.85)$$

W zakresie nieliniowym współczynnik załamania \tilde{n} i współczynnik absorpcji zależą od natężenia pola i zazwyczaj przyjmują postać

$$\tilde{n} = n + n_2 |E|^2, \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2 \quad (4.86)$$

gdzie

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)}) \quad , \quad \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \text{Im}(\chi_{xxxx}^{(3)}) \quad (4.87)$$

Stosując metodę separacji zmiennych, którą już wykorzystywaliśmy w rozdziale 1 do rozwiązania równania Helmholtza dla przypadku liniowego, możemy zapisać natężenie pola $\tilde{E}(r, \omega - \omega_0)$ jako iloczyn składowej pola $F(x, y)$ w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku z rozchodzenia się fali, składowej pola wolnozmiennnej obwiedni w kierunku z $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ oraz szybkozmiennnej składowej $\exp(i\beta_0 z)$

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (4.88)$$

gdzie β_0 jest wektorem falowym (w rozdziale 1 dotyczącym propagacji w światłowodach nazywaliśmy tę wielkość stałą propagacji) i stanowi pierwszy człon w rozwinięciu w szereg Taylora

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (4.89)$$

gdzie:

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.90)$$

Podstawiając (4.88) do równania Helmholtza (4.82) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F = 0 \quad (4.91)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0 \quad (4.92)$$

Wektor falowy $\tilde{\beta}$ wyznaczamy z równania (4.91) analogicznie do metody przedstawionej w rozdziale 1 gdzie opisaliśmy propagację modów w światłowodach.

Korzystając z (4.85- 4.86) możemy przedstawić stałą dielektryczną w przybliżeniu

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n \quad (4.93)$$

gdzie Δn jest niewielkim zaburzeniem i wyraża się wzorem

$$\Delta n = n_2 |E^2| + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \quad (4.94)$$

Równanie (4.91) może być rozwiązane stosując teorię zaburzeń pierwszego rzędu. Mianowicie, zakładamy w zerowym przybliżeniu że gdy $\varepsilon \approx n^2$ rozwiązaniem równania (4.91) jest $F(x, y)$ odpowiadające rozkładowi modu HE_{11} w światłowodzie jednomodowym opisanemu w rozdziale 1 i odpowiadającego temu rozkładowi wektorowi falowemu $\beta(\omega)$.

Mając rozwiązanie zerowego rzędu $F(x,y)$ włączamy poprawkę $2n\Delta n$ (4.93) do równania (4.91) i rozwiązujemy metodą perturbacyjną pierwszego rzędu. W rezultacie otrzymujemy

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (4.95)$$

gdzie

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (4.96)$$

Nateżenie $E(\mathbf{r}, t)$ z (4.72) oraz polaryzacje $P_L(\mathbf{r}, t)$ oraz $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$ z (4.75-4.76) można wyznaczyć podstawiając transformatę Fouriera dla $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ (4.88) do (4.72)

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \{ F(x, y) A(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)] + c.c. \} \quad (4.97)$$

gdzie

$A(z, t)$ jest odwrotną transformatą Fouriera $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega, \quad (4.98)$$

$\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ można wyznaczyć z równania (4.92), które można zapisać jako

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0] \tilde{A} \quad (4.99)$$

gdzie $(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)$ zastąpiono przez $2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$

Aby przejść do domeny czasu $A(z, t)$ można zastosować odwrotną transformatę Fouriera (4.93) do obu stron równania (4.99) otrzymując

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A \quad (4.100)$$

Wykorzystując (4.94) w (4.99) możemy obliczyć $\Delta\beta$ i wstawić do (4.100). Ostatecznie otrzymujemy równanie falowe w domenie czasu,

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (4.101)$$

Równanie nosi nazwę nieliniowego równania Schrödingera (ang. nonlinear Schrödinger, NLS) i pełni ważną rolę w opisie efektów GVD i nieliniowości światłowodów.

Nieliniowe równanie Schrödingera włącza następujące efekty:

- straty w światłowodzie - $\frac{\alpha}{2} A$,
- prędkość grupowa centrum impulsu - $\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}$,
- dyspersję prędkości grupowej GVD - $\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$,
- nieliniowość współczynnika załamania światłowodu $i\gamma|A|^2 A$

gdzie

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}} \quad (4.102)$$

oraz

$$A_{eff} = \frac{\left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int \int |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (4.103)$$

Typowe wartości parametrów występujących we wzorze (4.101) w standardowych światłowodach szklanych jednomodowych dla $1.5 \mu m$ wynoszą:

$$n_2 \approx 2.6 \times 10^{-20} m^2 / W ; A_{eff} \approx 20 - 100 \mu m^2 ;$$

$$\gamma \approx 1 - 10 W^{-1} / km ; \beta_2 = -20 ps^2 / km$$

4.8.2. Włączenie efektów nieliniowych wyższego rzędu do równania nieliniowego Schrödingera

Równanie nieliniowe Schrödingera (4.101), choć bardzo użyteczne do opisu propagacji światła w światłowodach dla impulsów dłuższych niż 1 ps, jest niewystarczające do opisu zjawisk nieliniowych takich jak wymuszone rozpraszanie Ramana (SRS), wymuszone rozpraszanie Brillouina (SBS), automodulacja SPM, mieszanie czterofalowe, czyli nie wystarcza do opisu zjawisk omówionych w rozdziałach 4.3 - 4.7. Ponadto, niekiedy włączenie trzeciego wyrazu β_3 w rozwinięciu Taylora (4.89) jest konieczne. Włączeniem tych efektów zajmiemy się w tym rozdziale.

W ogólności funkcje odpowiedzi $\chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3)$ są skomplikowaną funkcją czasu. Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale nieliniowa odpowiedź układu została znacznie uproszczona, gdy założymy, że odpowiedź jest natychmiastowa. Jest to drastyczne uproszczenie, bowiem tylko polaryzacja elektronowa jest natychmiastowa, wibracyjne stopnie swobody związane z drganiami jąder cząsteczek są dużo wolniejsze i odpowiedź układu nie jest natychmiastowa po zastosowaniu impulsu pola elektrycznego. Oznacza to, że nie można stosować funkcji odpowiedzi w postaci

$$\chi_{xxx}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi_{xxx}^{(3)}\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3). \quad (4.104)$$

W szczególności przybliżenia tego zdecydowanie nie można używać do opisu wymuszonego rozpraszania Ramana, bowiem to wibracje decydują o przebiegu zjawiska Ramana. Aby uwzględnić wolne zmiany możemy wprowadzić funkcję odpowiedzi która przyjmuje postać [21]

$$\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi^{(3)}R(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3) \quad (4.105)$$

gdzie $R(t - t_1)$ jest nieliniową funkcją odpowiedzi, normalizowaną tak aby $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt = 1$.

Wzór 4.105 można stosować tylko w warunkach nierezonansowych.

Podstawiając 4.105 do (4.75) otrzymujemy

$$P_{NL}(r, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E(r, t) \int_{-\infty}^t R(t - t_1) |E(r, t_1)|^2 dt_1 \quad (4.106)$$

Stosując procedurę analogiczną do opisaną w poprzednim rozdziale, można pokazać [22], że w domenie częstości otrzymujemy równanie podobne do równania Helmholtza, jeżeli zaniedbamy człon po prawej stronie

$$\nabla^2 \tilde{E} + n^2(\omega) k_0^2 \tilde{E} = -ik_0 \alpha + \chi^{(3)} \frac{\omega^2}{c^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\omega - \omega_1) \times \tilde{E}(\omega_1, z) \tilde{E}(\omega_2, z) \tilde{E}^*(\omega_1 + \omega_2 - \omega, z) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.107)$$

gdzie $\tilde{R}(\omega - \omega_1)$ jest transformatą Fouriera funkcji odpowiedzi $R(t - t_1)$. Traktując wyrażenie po prawej stronie jako zaburzenie, wyznaczamy rozkład modalny $F(x, y)$, następnie wyznaczamy stałą propagacji

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (4.108)$$

Jednak $\Delta\beta$ wyraża się już innym niż (4.96) wzorem. Definiując wolnozmienną funkcję

$A(z, t)$ jak w równaniu (4.92) otrzymujemy [22]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(A(z, t) \int_{-\infty}^{\infty} R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' \right) \quad (4.109)$$

Równanie (4.109) jest prawdziwe nie tylko w przybliżeniu wolnozmienniej obwiedni (ang. slowly varying envelope approximation) ale również dla impulsów tak krótkich, jak zaledwie kilka cykli optycznych.

Aby bezpośrednio przeanalizować wpływ zjawiska Ramana, funkcję odpowiedzi $R(t)$ można napisać jako

$$R(t) = (1 - f_R)\delta(t) + f_R h_R(t) \quad (4.110)$$

gdzie pierwszy człon opisuje natychmiastowy wkład elektronowy do polaryzacji, zaś drugi człon opisuje udział wibracji, czyli efekt Ramana. Funkcja f_R opisuje wkład do polaryzacji pochodzący od wibracji, funkcja $h_R(t)$ związana jest z wzmocnieniem Ramana omawianym w rozdziale 4.3

$$g_R(\Delta\omega) = \frac{\omega_0}{cn_0} f_R \chi^{(3)} \text{Im}[\tilde{h}_R(\Delta\omega)] \quad (4.111)$$

gdzie Im oznacza urojoną część transformaty Fouriera \tilde{h}_R funkcji odpowiedzi $h_R(t)$. Część rzeczywistą \tilde{h}_R można otrzymać z części urojonej korzystając z relacji Kramersa-Kroniga [23]. Stosując różne modele dla wibracji można wyznaczyć analityczną postać $h_R(t)$. Niżej przedstawiono postać $h_R(t)$ dla tłumionych oscylacji [24]

$$h_R(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \sin\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (4.112)$$

Równanie 4.109 można uprościć, gdy założymy, że impulsy są krótkie ($\tau_0 < 5ps$), ale znacznie dłuższe niż czas trwania zaledwie kilku cykli optycznych ($\tau_0 \gg 10fs$). Wtedy można zastosować rozwinięcie w szereg Taylora

$$|A(z, t - t')|^2 \approx |A(z, t)|^2 - t' \frac{\partial}{\partial t} |A(z, t)|^2 \quad (4.113)$$

Definiując pierwszy moment funkcji odpowiedzi jako

$$T_R \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t R(t) dt = f_R \int_{-\infty}^{\infty} t h_R(t) dt = f_R \frac{d(\text{Im} \tilde{h}_R)}{d(\Delta\omega)} \Big|_{\Delta\omega=0} \quad (4.114)$$

Wstawiając (4.113) i (4.114) do (4.109) oraz korzystając z faktu, że $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt=1$ otrzymujemy

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = i\gamma \left(|A|^2 A + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right) \quad (4.115)$$

gdzie zastosowano ruchomy układ odniesienia poruszający się z prędkością grupową v_g centrum paczki falowej

$$T = t - \frac{z}{v_g} \equiv t - \beta_1 z \quad (4.116)$$

Porównując równanie 4.115 z nieliniowym równaniem Schrödingera (NLS) (4.101) zauważamy trzy nowe człony odpowiedzialne za:

- $\frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3}$ wprowadza dyspersję trzeciego rzędu, której włączenie okazuje się konieczne dla bardzo krótkich impulsów, bowiem reprezentują one bardzo szerokie widmo spektralne,
- $\frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A)$ wprowadza pierwszą pochodną polaryzacji nieliniowej [24]
- $T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T}$ jest związana z efektem Ramana i odpowiedzialna jest za przesunięcie częstości (ang. self-frequency shift) [25] indukowana przez rozpraszanie wewnątrz impulsu (ang. intrapulse scattering).

W praktyce, gdy czas trwania impulsu $\tau_0 > 5ps$ dwa ostatnie człony są zaniedbywalne, a ponadto pierwszy człon też jest zaniedbywalny gdy długość fali centrum impulsu nie znajduje się w pobliżu długości fali dla której współczynnik dyspersji $D=0$. Można wtedy napisać

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\alpha}{2} A - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (4.117)$$

Równanie to jest identyczne z nieliniowym równaniem Schrödingera (4.101) gdy zastosujemy w nim ruchomy układ odniesienia (4.115)

Gdy moce szczytowe impulsów stają się rzędu $1GW/cm^2$ należy włączyć człony nieliniowe nawet piątego rzędu (4.4). Efekt ten można włączyć przez zastąpienie parametru γ zmodyfikowanym parametrem

$$\gamma = \frac{\gamma_0 A}{1 + b_s |A|^2} \approx \gamma_0 (1 - b_s |A|^2) \quad (4.118)$$

gdzie b_s jest parametrem nasycenia. W praktyce dla szklanych światłowodów nasycenia przy którym nieliniowość zaczyna nasycać się $b_s |A|^2 \ll 1$ i równanie 4.117 może być z powodzeniem stosowane nawet dla stosunkowo dużych mocy szczytowych. Jeżeli jednak istnieje efekt nasycenia, uwzględniamy go poprzez wprowadzenie równania 4.118 do równania 4.117. Takie równanie nosi nazwę równania nieliniowego NLS trzeciego i piątego rzędu (ang. cubic-quintic NLS equation).

4.8.3. Wyprowadzenie zależności na poszerzenie impulsu spowodowanego efektem GVD i efektem automodulacji SPM [25]

W rozdziale 3 pokazaliśmy, że dyspersja prędkości grupowej GVD powoduje poszerzenie impulsu (wzór (3.27a lub 3.28). W tym rozdziale wyprowadzimy ten wzór oraz inne zależności użyteczne w analizie zniekształcenia impulsów spowodowanych dyspersją GVD i efektem automodulacji SPM.

Analizę ograniczymy do impulsów $\tau_0 > 5ps$, czyli takich dla których można zastosować nieliniowe równanie Schrödingera (4.117)

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (4.119)$$

Jak powiedzieliśmy w rozdziale 4.8.2 równanie to włącza :

- straty w światłowodzie - człon $\frac{\alpha}{2} A$,
- prędkość grupową centrum impulsu - we wzorze (4.96) był to człon $\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}$, który został uwzględniony w (4.119) poprzez wprowadzenie ruchomego układu odniesienia $T = t - \frac{z}{v_g} \equiv t - \beta_1 z$ (4.120)
- dyspersję prędkości grupowej GVD - $\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}$,

- nieliniowość światłowodu - $\gamma|A|^2 A$.

Wprowadźmy znormalizowaną skalę czasową względem długości impulsu wejściowego τ_0

$$\tau = \frac{T}{\tau_0} = \frac{t - \frac{z}{v_g}}{\tau_0} \quad (4.121)$$

oraz amplitudę znormalizowaną impulsu $U(z, \tau)$, która nie zależy od strat w światłowodzie

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z / 2) U(z, \tau) \quad (4.122)$$

gdzie P_0 jest mocą wejściowego impulsu.

Wykorzystując zależności (4.121-4.122) w 4.119 otrzymujemy

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (4.123)$$

gdzie $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ w zależności od znaku parametru (β_2) charakteryzującego dyspersję GVD oraz

$$L_D = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (4.124)$$

Wielkości L_D i L_{NL} są znane w literaturze [25] jako długość dyspersji (ang. dispersion length) i długość nieliniowa (ang. nonlinear length), charakteryzują odległość L w światłowodach, dla których efekty dyspersji i efekty nieliniowe są zaniedbywalne, bądź odgrywają ważną rolę

- gdy długość światłowodu spełnia warunek $L \ll L_D$ oraz $L \ll L_{NL}$, zarówno efekty dyspersyjne GVD oraz efekty nieliniowe można zaniedbać,
- gdy $L \ll L_{NL}$ ale $L \approx L_D$, efekty nieliniowe są zaniedbywalne, zniekształcenie impulsu czasowego jest spowodowane jedynie przez dyspersję GVD,
- gdy $L \ll L_D$ ale $L \approx L_{NL}$, efekty dyspersyjne są zaniedbywalne w porównaniu z efektami nieliniowymi, zniekształcenie impulsu czasowego jest spowodowane przez automodulację fazy SPM.

Ze wzoru 4.122 można oszacować wkład dyspersji GVD i nieliniowości automodulacji SPM dla określonych mocy wejściowych P_0 oraz długości impulsów, zakładając typowe wartości $|\beta_2| \approx 20 ps^2 / km$ oraz $\gamma \approx 3 W^{-1} km^{-1}$ w oknie 1550 nm. Przypadek drugi z dominacją GVD jest realizowany gdy

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 \tau_0^2}{|\beta_2|} \ll 1 \quad (4.125)$$

czyli dla krótkich impulsów $\tau_0 \approx 1 ps$ i małych mocy wejściowych P_0 , np. $P_0 \ll 1 W$.

Przypadek trzeci z dominacją automodulacji fazy jest realizowany gdy spełniony jest warunek

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 \tau_0^2}{|\beta_2|} \gg 1 \quad (4.126)$$

czyli dla dłuższych impulsów $\tau_0 > 100 ps$ i dużych mocy wejściowych P_0 , np. $P_0 \approx 1 W$.

I wreszcie przypadek pierwszy, gdy oba efekty są zaniedbywalne, jest najbardziej pożądanym przypadkiem dla transmisji optycznej. Podsumowując ten fragment dyskusji, możemy powiedzieć, że

dla standardowych światłowodów telekomunikacyjnych w oknie 1550 nm $|\beta_2| \approx 20 ps^2 / km$ i impulsów $\tau_0 > 100 ps$, $L_D \approx 500 km$, czyli dla światłowodów o długości $L \approx 50-80 km$, efekty dyspersji GVD są zaniedbywalne (bo $L \ll L_D$). Jednak dla krótszych impulsów τ_0 rzędu 1 ps, a więc dla szybszej modulacji, $L_D \approx 50 m$, czyli efekt dyspersji jest nie zaniedbywalny na całej długości światłowodu, bo $L \gg L_D$.

Rozważmy teraz wpływ dyspersji GVD na poszerzenie impulsu czasowego. W rozdziale 3 pokazaliśmy, że dyspersja prędkości grupowej GVD powoduje poszerzenie impulsu (wzór (3.27a lub 3.28)). Teraz wyprowadzimy ten wzór oraz inne zależności użyteczne w analizie zniekształcenia impulsów spowodowanych dyspersją GVD. Ponieważ chwilowo zaniedbujemy wpływ nieliniowości SPM, więc wstawiając $\gamma=0$ do 4.119. Wprowadzając znormalizowaną amplitudę U (4.122) otrzymujemy

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (4.127)$$

Równanie może być prosto rozwiązane w domenie częstości, gdy skorzystamy z odwrotnej transformaty Fouriera

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (4.128)$$

Wykorzystując (4.128) w (4.127) otrzymujemy równanie

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 \tilde{U} \quad (4.129)$$

którego rozwiązaniem jest

$$\tilde{U}(z, \omega) = \tilde{U}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z\right) \quad (4.130)$$

Wzór (4.130) ilustruje bardzo poglądowo efekt dyspersji GVD, mianowicie GVD powoduje przesunięcie fazy każdej częstości z osobna. Wielkość tego przesunięcia zależy od odległości z jaką pokonał impuls w światłowodzie. Wracając do domeny czasowej za pomocą (4.128) poprzez podstawienie (4.130) otrzymujemy

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z - i\omega T\right) d\omega \quad (4.1231)$$

gdzie $\tilde{U}(0, \omega)$ jest znormalizowaną amplitudą impulsu wejściowego dla $z=0$ w domenie częstości i wyraża się poprzez transformatę Fouriera

$$\tilde{U}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, T) \exp(i\omega T) dT \quad (4.132)$$

Założmy, że impuls wejściowy ma kształt funkcji Gaussa

$$U(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2\tau_0^2}\right) \quad (4.133)$$

gdzie τ_0 jest czasem trwania impulsu, zdefiniowanym jako szerokość połówkowa dla intensywności odpowiadającej $1/e$ wartości maksymalnej i związana jest z szerokością połówkową w połowie wysokości (ang. FWHM, full width at half maximum) za pomocą relacji

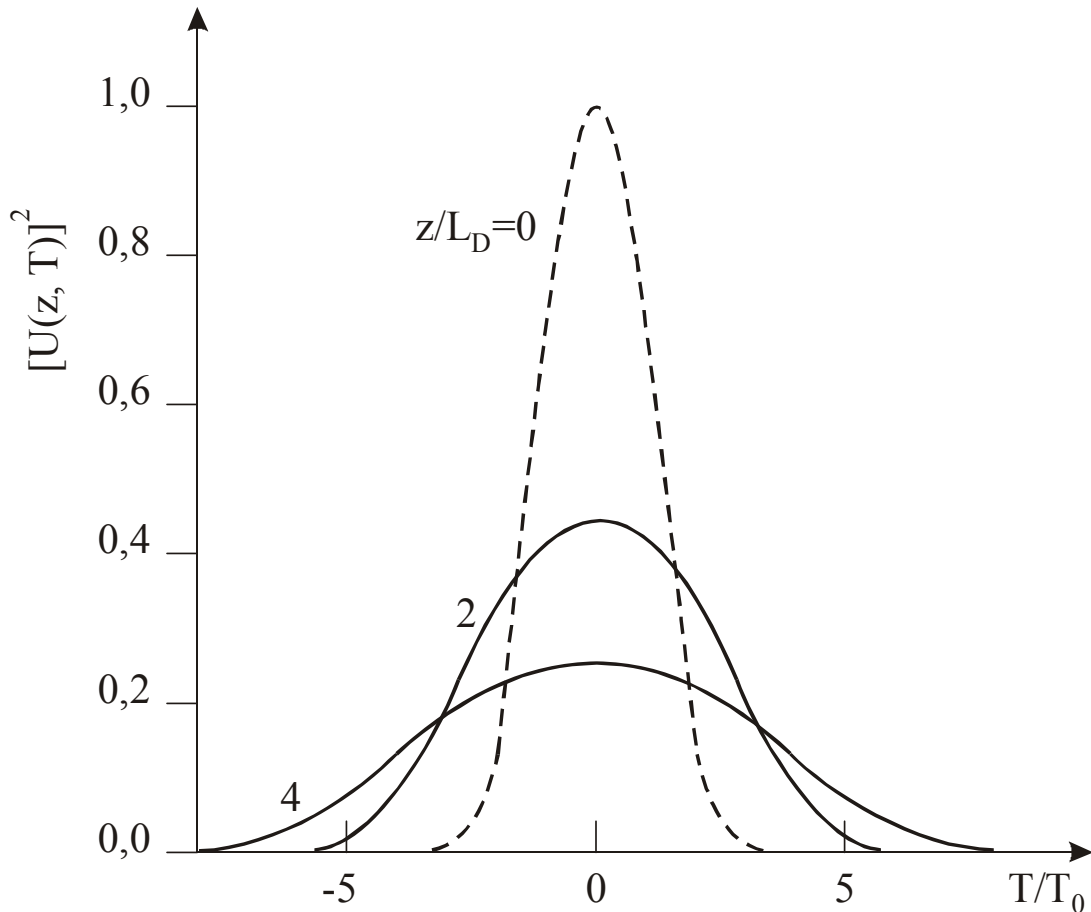
$$T_{FWHM} = 2(\ln 2)^{\frac{1}{2}} \tau_0 \approx 1.665\tau_0 \quad (4.134)$$

Wykorzystując 4.133 w 4.132 i 4.131 otrzymujemy

$$U(z, T) = \frac{\tau_0}{(\tau_0^2 - i\beta_2 z)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{T^2}{2(\tau_0^2 - i\beta_2 z)}\right) \quad (4.135)$$

Porównując 4.133 z 4.135 stwierdzamy, że impuls zachowuje kształt Gaussa, ale ulega poszerzeniu do wartości

$$\tau(z) = \tau_0 \left[1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.136)$$



Rys.4.28 Ilustracja poszerzenia impulsu o kształcie Gaussowskim podczas propagacji w światłowodzie.----- wejściowy impuls dla $z=0$, 2 – impuls po pokonaniu drogi $z=2L_D$, 4 - impuls po pokonaniu drogi $z=4L_D$ [26], gdzie L_D jest długością dyspersji światłowodu zdefiniowana wzorem (4.124)

Impuls wejściowy nie wykazuje modulacji fazy (ang. unchirped pulse), zaś impuls propagowany przez światłowód wykazuje modulację fazy w czasie trwania impulsu. Rzeczywiście, porównując 4.133 i 4.135 można napisać jako

$$U(z, T) = |U(z, T)| \exp[i\phi(z, T)] \quad (4.137)$$

gdzie faza $\phi(z, T)$ zależy od czasu i wyraża się wzorem

$$\phi(z, T) = - \frac{\operatorname{sgn}(\beta_2) \left(\frac{z}{L_D} \right)}{1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2} \frac{T^2}{\tau_0^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z}{L_D} \right), \quad (4.138)$$

Ze wzoru (4.138) można wyznaczyć zmiany częstotliwości (przesunięte w stosunku do częstotliwości centralnej ω_0)

$$\delta\omega(T) = - \frac{\partial\Phi}{\partial T} = \frac{\operatorname{sgn}(\beta_2) \left(\frac{2z}{L_D} \right)}{1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2} \frac{T}{\tau_0^2} \quad (4.139)$$

Wzór 4.139 oznacza, że częstotliwość zmienia się liniowo w czasie trwania impulsu. Gdy $\beta_2 > 0$ (czyli światłowód wykazuje dodatni efekt GVD), $\delta\omega(T) < 0$ dla $T < 0$, czyli dla przedniego narastającego zbocza impulsu czasowego, a potem rośnie liniowo i jest dodatnia $\delta\omega(T) > 0$ dla $T > 0$ czyli dla opadającego zbocza impulsu. Oznacza to że składowe spektralne impulsu o większych długościach fali znajdują się na czele impulsu czasowego, zaś fale o mniejszych długościach fali znajdują się na końcu impulsu. Gdy światłowód wykazuje ujemny efekt GVD na czele impulsu są składowe niebieskie, zaś czerwone na końcu. Niezależnie od znaku GVD powoduje poszerzenie czasowe impulsu (4.136).

Sytuacja jest trochę inna, gdy wejściowy impuls ma już początkowy chirp [28]. Początkowy chirp można włączyć za pomocą parametru C poprzez wyrażenie

$$U(0, T) = \exp \left(- \frac{(1 + iC) T^2}{2 \tau_0^2} \right) \quad (4.140)$$

Zamiast wyrażenia (4.33) opisującego impuls bez chirpu. Obliczając $\delta\omega(T) = - \frac{\partial\Phi}{\partial T}$ można

stwierdzić, że dla $C > 0$ zmiana częstości $\delta\omega(T)$ rośnie liniowo od zbocza przedniego do zbocza tylnego impulsu (ang. up-chirp) i jest odwrotnie dla $C < 0$ (ang. down-chirp), czyli dla $C > 0$ mamy dodatnią GVD dyspersją, zaś dla $C < 0$ mamy dyspersję ujemną GVD.

Podstawiając (4.140) do (4.132) otrzymujemy

$$\tilde{U}(0, \omega) = \left(\frac{2\pi\tau_0^2}{1 + iC} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{\omega^2 \tau_0^2}{2(1 + iC)} \right) \quad (4.141)$$

czyli szerokość spektralna (1/e) wynosi

$$\Delta\omega = (1 + C^2)^{\frac{1}{2}} / \tau_0 . \quad (4.142)$$

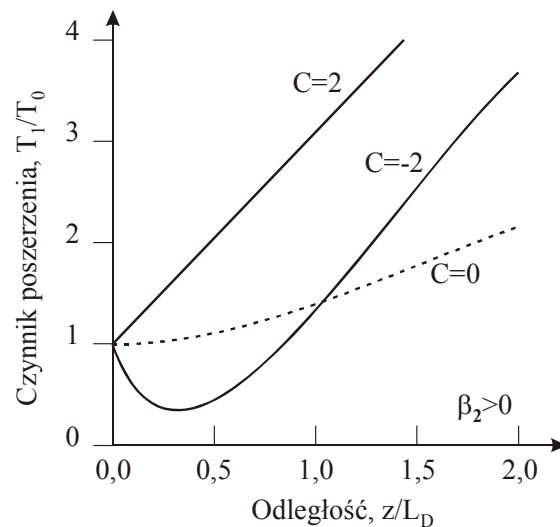
Dla $C=0$ spełniony jest warunek $\Delta\omega\tau_0=1$, czyli częstość spełnia warunek transformacji Fouriera (ang. transform-limited) i oznacza impuls bez chirpu. Podstawiając (4.141) do (4.131) otrzymujemy impuls czasowy, który pozostaje impulsem Gaussa

$$U(z, T) = \frac{\tau_0}{[\tau_0^2 - i\beta_2 z(1 + iC)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(1 + iC)T^2}{2[\tau_0^2 - i\beta_2 z(1 + iC)]}\right), \quad (4.143)$$

zaś czas trwania impulsu ulega zmianie i wyraża się wzorem

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left[\left(1 + \frac{C\beta_2 z}{\tau_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_0^2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.144)$$

Czas trwania impulsu zależy od znaku chirpu wejściowego C oraz znaku dyspersji GVD w światłowodzie. Gdy $C\beta_2 > 0$, impuls czasowy ulega monotonicznemu poszerzeniu wraz ze wzrostem odległości z w światłowodzie. Gdy $C\beta_2 < 0$, długość trwania impulsu najpierw maleje, a potem rośnie monotonicznie wraz ze wzrostem odległości z w światłowodzie.



Rys.4.29 Ilustracja poszerzenia impulsu o kształcie Gaussowskim z wejściowym chirpem charakteryzowanym przez parametr C podczas propagacji w światłowodzie o dodatniej dyspersji $GVD > 0$, ----- impuls dla $C=0$, $C=2$ – impuls dla wejściowej dyspersji GVD dodatniej, $C=-2$ - impuls dla wejściowej dyspersji GVD ujemnej [26]. Gdy światłowód wykazuje dyspersję $GVD < 0$, te same krzywe opisują poszerzenie pasm gdy zamienimy znaki C

Łatwo jest zrozumieć ten początkowy efekt skrócenia impulsu analizując wzór (4.144). Gdy $C\beta_2 < 0$, na wejściu do światłowodu, impuls wykazuje własną GVD (opisany parametrem C) przeciwną do GVD światłowodu, w którym zaczyna propagować. Oznacza to, że fale dłuższe, które na wejściu poruszały się szybciej, zaczynają w światłowodzie wykazywać efekt opóźnienia, zaś wolniejsze fale krótsze zaczynają poruszać się szybciej. Prowadzi to kompensacji efektu dyspersji GVD. Impuls osiąga minimum dla takiej odległości z_{min} w światłowodzie, dla której oba efekty skompensowały się ($GVD=0$), którą można wyznaczyć z (4.144)

$$z_{min} = \frac{|C|}{1 + C^2} L_D \quad (4.145)$$

Dla z_{min} impuls jest najkrótszy i w domenie częstości wykazuje szerokość spektralną $\Delta\omega$ taką, jaka wynika z transformacji Fouriera (ang. transform-limited spectral band width).

$$\tau_{min} = \frac{\tau_0}{(1 + C^2)^{1/2}}, \quad (4.146)$$

gdzie $\Delta\omega \cdot \tau_{min} = 1$.

Potem, gdy impuls propaguje dalej w światłowodzie, zaczyna dominować efekt GVD światłowodu impuls czasowy ponownie ulega wydłużeniu.

Przystąpimy teraz do przeanalizowania przypadku automodulacji fazy (SPM). Jak powiedzieliśmy w rozdziale 4.6 efekt ten wynika z faktu, że nieliniowy współczynnik załamania $n_2(\omega)$ zależy od intensywności impulsu $I(t)$

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega)I(t). \quad (4.147)$$

Założmy, że dyspersja prędkości grupowej GVD jest zaniedbywalna. W równaniu (4.123) możemy więc podstawić $\beta_2 = 0$ otrzymując

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{ie^{-\alpha z}}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (4.148)$$

gdzie U jest znormalizowaną amplitudą impulsu zdefiniowaną wzorem (4.122) zaś parametr L_{NL} nosi nazwę długości nieliniowej (ang. nonlinear length) i wyraża się wzorem

$$L_{NL} = (\gamma P_0)^{-1} \quad (4.149)$$

gdzie γ zależy od nieliniowego współczynnika załamania n_2 (4.102) a P_0 jest mocą szczywną impulsu. Równanie (4.148) rozwiązujemy podstawiając $U = V \exp(i\phi_{NL})$ gdzie ϕ_{NL} jest nieliniową fazą (4.49). Otrzymujemy

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi_{NL}}{\partial z} = \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} V^2 \quad (4.150)$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest stała, całkując po długości światłowodu równanie drugie otrzymujemy

$$U(L, T) = U(0, T) \exp[i\phi_{NL}(L, T)] \quad (4.151)$$

gdzie U(0,) jest amplitudą znormalizowaną dla z=0 zaś nieliniowa faza ϕ_{NL} dla z=L

$$\phi_{NL}(L, T) = |U(0, T)|^2 (L_{eff} / L_{NL}) \quad (4.152)$$

gdzie efektywna długość światłowodu L_{eff} jest zdefiniowana jako

$$L_{eff} = [1 - \exp(-\alpha L)] / \alpha \quad (4.153)$$

Maksimum nieliniowej fazy otrzymujemy dla centrum impulsu (T=0), bowiem pokazaliśmy, że ϕ_{NL} zależy od mocy. Tak więc, dla amplitudy znormalizowanej tak , że U(0,0)=1 otrzymujemy

$$\Phi_{max} = \frac{L_{eff}}{L_{NL}} = \gamma P_0 L_{eff} \quad (4.154)$$

Jak powiedzieliśmy w rozdziale 4.6 spektralne poszerzenie impulsu δ_ω spowodowane automodulacją SPM jest konsekwencją czasowej zależności fazy ϕ_{NL} . Chwilową częstość wzdłuż impulsu można obliczyć ze wzoru

$$\delta\omega(T) = -\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial T} = -\left(\frac{L_{eff}}{L_{NL}}\right) \frac{\partial}{\partial T} |U(0, T)|^2 \quad (4.155)$$

Poszerzenie czasowe impulsu zależy od jego kształtu U(0.T). Załóżmy, że impuls ma kształt wyrażony wzorem

$$U(0, T) = \exp\left[-\frac{1+iC}{2} \left(\frac{T}{z_0}\right)^{2m}\right] \quad (4.156)$$

Podstawiając (4.156) do (4.155) otrzymujemy

$$\delta\omega(T) = \frac{2m}{T_0} \frac{L_{eff}}{L_{NL}} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m-1} \exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right] \quad (4.157)$$

Ze wzoru (4.157) wynika, że gdy T<0 (czyli narastająca część impulsu), to $\delta_\omega < 0$ (czyli przesunięcie do małych częstości) gdy T=0 (centrum impulsu), to $\delta_\omega = 0$, zaś dla opadającej części impulsu T>0, $\delta\omega > 0$ (czyli przesunięcie do wyższych częstości).

Wyprowadzone zależności pozwalają zrozumieć modulację fazy (ang. frequency chirp) przedstawioną na rysunku 4.21 która stanowi istotę automodulacji SPM.

1. R.H. Stolen, E.P. Ippen, Raman gain in glass optical waveguides, Appl. Phys. Lett. Vol.22,no.6,1973
2. S.V.V. Raman and K.S.Krishnan, "A new type of secondary radiation", Nature 121,501-2 (1928)
3. J. Hecht, Raman amplifiers boost system margins at high speed, Laser Focus World 37(6) (June,2001) 135-140
4. J. Hecht, Mitigating nonlinear effects is essential to long-haul transmission systems, Laser Focus World 38(5) (May, 2002) 155-162
5. M. Islam, M.Nietubyc, Not a pretty picture, WDM solutions 3(3) (March 2001)
6. H. Abramczyk, Introduction to Laser Spectroscopy, Elsevier, New York, 2005
7. Z. Kęcki, Wstęp do spektroskopii molekularnej, PWN
8. H, Barańska
9. M. N. Islam, IEEE Journal of selected Topics in Quantum Electronics, vol.8, no.3, 2002
10. Y.R. Shen, The principles of Nonlinear Optics, Wiley, New York, 1984, chap. 10
11. R. G. Smith, Appl. Opt.11, 2489 (1972)
12. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, 2001,p.302
13. D. Marcuse, J.Opt. Soc. Am. 68, 103 (1978)
14. G. P. Agrawal," Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, p.41
15. G. P. Agrawal,"Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, p361, p100
16. R. H. Stolen, C. Lin, Phys. Rev. A 17, 1448 (1978)
17. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, 2001, p. 104-105
18. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, p.105
19. S. Mukamel, Principles of Nonlinear Spectroscopy, Oxford, 1995

20. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, 2001
21. K.J. Blow, D. Wood, IEEE J. Quantum Electron. 25, 2665 (1989)
22. P.M. Mamyshev, S. V. Chernikov, Opt. Lett. 15, 1076 (1990)
23. M.Schubert, B. Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics, Wiley, New York, 1986
24. S. Blair, K. Wagner, Opt. Quantum Electron. 30, 697 (1998)
25. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, 2001, p. 59, 63,97
26. G. P. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 3rd edition, Academic Press, 2001, p. 68, 70